।।इये कूटप्रश्नांचिये नगरी।।

शशिकांत द. चवाथे

निलेश प्र. गोरे

।।इये कूटप्रश्नांचिये नगरी।।

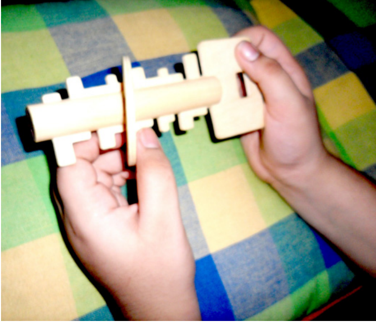
शशिकांत द. चवाथे
निलेश प्र. गोरे

खाजगी वितरणाकरिता

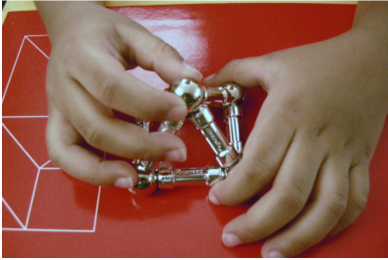
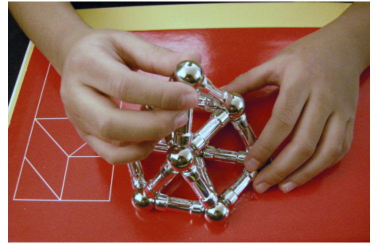
।। इये कूटप्रश्नांचिये नगरी।।

आवृत्ती :
जानेवारी २०११

संगणकीय अक्षररचना :
शिवानी स्वानंद ओक
अक्षर व्यवस्थापन
गोरेगाव (पूर्व), मुंबई ४०००६३
२८७६२३६१/ ९२२३४४३६७२




लहान वयातच कोड्यांमधील गोडी
ज्यांना कळली आहे
त्या सृष्टी, वेदांग,
सोहम् आणि अद्वय
यांना अर्पण.

इये कूटप्रश्नांचिये नगरी


Martin Gardner

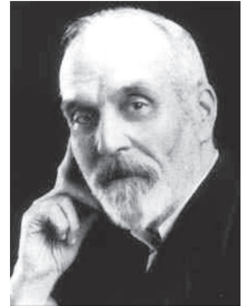

W.W.Rouse Ball

ही दुनिया कूट प्रश्नांची
किती सुंदर केली यांनी


Lewis Caroll

विसरणे न यांना केव्हा
आठवणी ग्रंथांच्या पृष्ठी


Samuel Loyd


H. E. Dudeney

मनोगत १

कोड्यांची माझी जवळीक लहानपणीच झाली. वडीलधाऱ्या माणसांकडे अगदी साध्याशा वाटणाऱ्या शाब्दिक कोड्यांचा खजिनाच असे व तो केव्हातरी बाहेर काढला जात असे. एक ते तीन ओळींत एखाद्या वस्तूचे त्यात मजेदार वर्णन केलेले असे व आपल्याला ती वस्तू ओळखावयाची असे. या वर्णनामध्ये कल्पनारम्यता दिसून येत असे.

उदाहरणार्थ :

'हिरवे बाबा, लाल आई
काळी काळी मुले'

याचे उत्तर असे '**कलिंगड**'

आणखी एक उदाहरण :

'पाहुणे आले गडबड झाली
झिपरी पोरगी कुठे गेली'

याचे उत्तर असे '**केरसुणी**'

अर्थातच ही काही गणिती कोडी नव्हेत. गणिती कोडी व त्यांच्यासारखी इतर कोडी ही त्यानंतरची पायरी मी नंतर चढलो.

कोड्यांचा संग्रह करणे व ती सोडविणे हा छंद मी जवळजवळ गेली ५५ वर्षे जोपासला आहे. या काळात या विषयावर मी ५०० च्या आसपास पुस्तके जमा केली आहेत. त्याचप्रमाणे कागद, प्लास्टिक, लाकूड आणि लोखंडी वा पितळेची तार वगैरे पदार्थ वापरून तयार केलेली व विकत घेतलेली अशी सर्व मिळून सुमारे ४०० कोडी माझ्या संग्रहात आहेत.

माझ्या बोलण्यात कोड्यांसंबंधीचे उल्लेख वारंवार ऐकून त्रस्त झालेल्या माझ्या एका मित्राने मला वेड लागले आहे की काय असा संशय व्यक्त केला होता. होय हे वेडच आहे!

इये कूटप्रश्नांचिये नगरी

जगात या विषयाची माझ्यापेक्षा वेडी असलेली माणसे कमी नाहीत. Internet वर गेलात तर माझ्या कितीतरी पटीने व्यासंग असलेली व कोड्यांचा संग्रह केलेली वेडी माणसे आपल्याला भेटतील. त्या मानाने माझा संग्रह अगदी नगण्य आहे. वरीलपैकी काही माणसे गणित विषयावर संशोधन करणारी असतात. त्यांपैकी काही विषय मनोरंजनात्मक गणिताच्या (Recreational Mathematics) बरेच जवळ जाणारे आणि म्हणून वेगवेगळ्या प्रकारच्या कोड्यांची जणू गंगोत्रीच असतात.

मुंबईतील हिंद विद्यालय या शाळेत असताना एक कोडे मला कोणीतरी सोडवायला दिले होते, ते मला अजून आठवते. एका तांब्याची किंमत ५ रुपये, एका वाटीची किंमत १ रुपया व एका चमच्याची किंमत ४ आणे (१/४ रुपया) असेल तर २० रुपयांत २० वस्तू कशा घेता येतील असे ते कोडे होते. जर 'क्ष' तांबे, 'य' वाट्या व 'झ' चमचे अशा वस्तू घेतल्या तर आपल्याला खालील समीकरणे मिळतात.

क्ष + य + झ = २०

५क्ष + य + १/४ झ = २०

तीन अव्यक्ते आहेत, पण दोनच समीकरणे आहेत. आमच्या गणिताच्या खर्शीकर सरांनी यावेळी आम्हांला Diophantine Equations ची ओळख करून दिली. 'क्ष', 'य', 'झ' यांच्या किमती फक्त पूर्णांकात असू शकतात, त्याचप्रमाणे १/४ झ ची किंमतसुद्धा पूर्णांकात असली पाहिजे व त्याकरिता 'झ'ची किंमत ४, ८, १२ किंवा १६ असली पाहिजे. ही जास्तीची माहिती लक्षात घेतली तर ३ अव्यक्ते २ समीकरणात बांधली असली तरी कोड्याचे उत्तर काढता येणे शक्य आहे.

खर्शीकर सरांकडे गणित शिकताना बऱ्याचवेळा आम्ही अशी न सुटलेली कोडी त्यांच्याकडे घेऊन जात असू.

एकेकाळी मराठीत गणिती कोड्यांवर पुस्तके जवळजवळ नव्हतीच. एक अपवाद म्हणजे 'बहुरंगी करमणूक भाग १ ते ३'. श्री. रानडे यांनी लिहिलेले हे पुस्तक त्यावेळी मुलांमध्ये फारच प्रिय होते. १९५८ साली एलफिन्स्टन महाविद्यालयात शिकत असताना तिथे माझा परिचय 'Scientific American' या मासिकाशी झाला. यात Martin Gardner यांचे Mathematical Games हे सदर असे. दर महिन्याला मी या मासिकाची चातकासारखी वाट बघत असे. Martin Gardner हे Recreational Mathematics (मनोरंजनात्मक

गणित) या विषयाचे व्यासंगी समजले जात. आजही त्यांचे चाहते (Fans) जगभर पसरलेले आहेत. त्यांच्या अलीकडेच झालेल्या निधनाने या क्षेत्राचे भरून न निघणारे नुकसान झाले आहे.

एलफिन्स्टन महाविद्यालयाच्या अफाट लायब्ररीत मला अजून एक अलीबाबाची गुहा सापडली. ती म्हणजे 'Mathematical Recreations and Essays' हे Rouse Ball यांनी लिहिलेले पुस्तक. कोड्यांच्या दुनियेतली ही जणू भगवद्‌गीता. इंटरनेटवर हे अत्यंत जुने पुस्तक आजही उपलब्ध आहे.

एलफिन्स्टन महाविद्यालयामधून Inter Science करून पुढे इंजिनीअरिंगला गेल्यानंतरसुद्धा मुंबई विद्यापीठाच्या किंवा एलफिन्स्टन महाविद्यालयाच्या लायब्ररीत जाऊन Scientific American चे खंड चाळून मी Mathematical Games हे सदर वाचत असे.

कोड्यांच्या जगात Sam Loyd व Henry Dudeney यांना विसरणे शक्य नाही. त्यांच्या पुस्तकातील वेगवेगळी कोडी म्हणजे कोड्यांवर प्रेम करणाऱ्या मंडळींकरिता पंचपक्वान्नांची मेजवानी. यांची काही पुस्तके आजही इंटरनेटवर उपलब्ध आहेत.

दोघाजणांमध्ये खेळले जाणारे व गणितावर आधारलेले खेळ हा मनोरंजनात्मक गणिताचा आणखी एका प्रकार आहे. असे खेळ निश्चित जिंकण्याच्या मार्गपद्धतीवर बरेच संशोधन झाले आहे. अशा एका खेळावर आधारलेल्या व मी व्ही.जे.टी.आय., मुंबई येथे प्राध्यापक असताना तयार केलेल्या एका यंत्राने (SINGOB - Specialist In Game Of Beads) विद्यार्थी व प्राध्यापकांचे बरेच मनोरंजन केले होते.

प्रस्तुत पुस्तक प्रसिद्ध करण्यामागे उद्देश असा आहे की, माझ्या संग्रहातील निरनिराळ्या कोड्यांनी मला जो आनंद दिला तो आपल्यासारख्या कोड्यांवर प्रेम करणाऱ्या मंडळींपर्यंत पोहोचवावा. या पुस्तकाचे एक वैशिष्ट्य म्हणजे १२ नाण्यांचे जगप्रसिद्ध कोडे सोडविण्याच्या नऊ पद्धती प्रथमच एकत्र दिल्या आहेत.

वेगवेगळ्या प्रकारची कोडी अभ्यासल्यानंतर असे ध्यानात येते की, प्रत्येक कोड्याचा प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्ष संबंध गणित शास्त्राशी आहे. त्या दृष्टीने प्रस्तुत पुस्तकात दिलेली बहुतेक कोडी गणिती कोडीच आहेत. गणित हा विषय माझ्या दृष्टीने तसा कधीच रुक्ष नव्हता; परंतु त्याला मनोरंजनाचे कोंदण घातल्यास सोन्याहून पिवळे !

इये कूटप्रश्नांचिये नगरी

मनोरंजन सोडून मला या छंदाचा दुसरा काही उपयोग झाला का ? कोडी सोडविण्याकरिता पायरी पायरीने तर्कशक्तीचा उपयोग करावा लागतो. कॉम्प्युटर सॉफ्टवेअर तयार करताना मला या गोष्टीचा उपयोग होत असे. प्रस्तुत पुस्तकात खिडक्यांचे कोडे (खिडकी पत्रे) नावाचा एक प्रकार दाखविला आहे. ही कल्पना वापरून, पिण्याच्या पाण्यातील जंतूंची संख्या मोजण्याकरिता प्रयोगशाळेत जी चाचणी केली जाते, तिच्यामधील आकडेमोडीकरता मी एक खिडकीपत्र तयार केले. या विषयावरील एक शोधनिबंध मी Indian Water Works Association Journal मध्ये प्रसिद्ध केला आहे. असे काही असले तरी कलेकरिता कला हेच खरे ! कोड्यांचा संग्रह करण्यात व ती सोडविण्यात मिळालेल्या आनंदाची कशाशीही तुलना करता येत नाही.

हे पुस्तक तयार करताना माझ्या कुटुंबातील मंडळींनी फार मदत केली. पुस्तकातील आकृत्या माझा मुलगा मंदार याने तयार केल्या आहेत. सात अमूर्त चित्रे माझी पत्नी साधना हिची आहेत. मुखपृष्ठ माझी सून मुग्धा हिने तयार करून दिले. पुस्तक वेबसाईटवर टाकण्यापूर्वी ते संपूर्ण वाचून माझी मुले – तृप्ती व मंदार – यांनी बहुमोल सूचना केल्या. ही सर्व कुटुंबातील मंडळी असल्याने त्यांचे आभार मानत नाही. प्रस्तुत पुस्तकाची संगणकीय अक्षररचना 'अक्षर व्यवस्थापन'च्या सौ. शिवानी स्वानंद ओक यांनी किती परिश्रमपूर्वक व आस्थेने केलेली आहे, हे आपल्या लक्षात येईलच.

शेवटी एवढेच म्हणावेसे वाटते की, हे पुस्तक म्हणजे कोड्यांच्या महासागरातील काही थेंब आहेत. वेगवेगळी पुस्तके, विशेषत: इंग्रजीमधील व संकेतस्थळे (Websites) यांमध्ये कोड्यांचा महासागर पसरलेला आहे. त्यातून प्रवास करावयास तुम्हा सर्वांना नक्कीच आवडेल.

वाचकांनी हे पुस्तक वाचून जरूर सूचना कराव्यात. पुढच्या आवृत्तीमध्ये त्या सूचनांची निश्चित दखल घेतली जाईल.

शशिकांत द. चवाथे
मुंबई

मनोगत (२)

दर्जेदार कोडी हे प्रगल्भ मेंदूचे उत्तम खाद्य होय. एक काळ असा होता की, मी कोड्यांनी पूर्ण पछाडून गेलो होतो. कोड्यांचे काही प्रकार मला फारच आवडत असत.

अ) शाब्दिक चलाखीची कोडी :

जसे – *बापलेक दोघेजण, भाकऱ्या केल्या तीन, तर त्या कशा वाटाल?*

याचे उत्तर – **बाप व दोघे लेक मिळून तीन माणसे** – असे आहे.

ब) उखाणे

जसे – *दोन भाऊ शेजारी, भेट नाही संसारी.*

याचे उत्तर आहे **डोळे**.

क) लावण्यांच्या स्पर्धेतली कोडी, जी काही मराठी चित्रपटांतून बघायला मिळतात.

ड) चित्रकोडी

जसे दोन चित्रांतील फरक ओळखा किंवा चित्रात अमूक अमूक वस्तू शोधा. मात्र या सर्वांहून फारच वेगळा प्रकार म्हणजे गणिती कोडी. ही कोडी कधी सरळ अंकगणिताच्या रूपात असतात तर कधी गोष्टींमध्ये गुंफलेली असतात. भौमितिक आकृत्यांचा पण बऱ्याच कोड्यांमध्ये वापर केला जातो.

काही कोड्यांना Celebrity चे स्वरूप प्राप्त झाले आहे. जसे वाघ, शेळी आणि गवताचा भारा घेऊन जाणाऱ्या माणसाला त्यांना नावेतून नदीपार न्यावयाचे असते ते कोडे.

ही कोडी सोडविण्याकरिता प्रत्यक्ष वा अप्रत्यक्ष गणितातील तत्त्वांचा वापर केला जातो.

हे पुस्तक बहुश: गणिती कोड्यावर आधारलेले आहे. ही कोडी सोडविल्याने वाचकांच्या निर्णयक्षमतेला चांगला व्यायाम मिळेल, असा माझा विश्वास आहे. या पुस्तकाने वाचकांची मेंदूची भूक जागृत जरी झाली तरी या पुस्तकाचे सार्थक झाले असे वाटेल.

निलेश प्र. गोरे
मुंबई

इये कूटप्रश्नांचिये नगरी

अनुक्रम

इये कूटप्रश्नांचिये नगरी

प्रकरण १
बारा नाणी : एक तौलनिक अभ्यास

फार सोपे दिसणारे पण सोडविण्यास कठीण असे हे जुने प्रसिद्ध कोडे आहे. हे वेगवेगळ्या प्रकारे सोडविता येते. सोडविण्याच्या बऱ्याच पद्धती एकाच ठिकाणी देता याव्यात म्हणून या कोड्याचा या संग्रहात आम्ही अंतर्भाव केला आहे.

१२ नाणी दिसावयाला सारखीच आहेत; परंतु त्यातील एक नाणे खोटे असून ते इतर नाण्यांपेक्षा जड तरी आहे किंवा हलके तरी आहे. इतर नाणी सारख्याच वजनाची आहेत. तराजूच्या दोन्ही पारड्यांत नाण्यांच्या वजनांची आपापसात तीन वेळा तुलना करून खोटे नाणे हुडकावयाचे आहे. शिवाय ते नाणे इतर नाण्यांच्या तुलनेत जड किंवा हलके आहे हे पण ओळखावयाचे आहे.

एकूण नाण्यांची संख्या व खोटे नाणे ओळखण्याकरिता कराव्या लागणाऱ्या तुलनात्मक वजनांची संख्या यांमधील गणित खालीलप्रमाणे आहे.

$न = {}^{१}/_{२} (३^{व} - १) - १$

(न = नाण्यांची संख्या, व = वजनांची संख्या)

हे कोडे सोडविण्याच्या नऊ पद्धती येथे दिल्या आहेत.

पद्धती - १

१) बारा नाण्यांना खालील शब्दांची नावे द्या.

अअब, अबअ, अबब, अबक, बबक,
बकअ, बकब, बकक, कअअ, कअब,
कअक, ककअ

२) तक्ता १.१ प्रमाणे तीन वेळा वजने करा.

३) आता एक तीन अक्षरी शब्द खालीलप्रमाणे बनवा.

पहिल्या वजनाच्या वेळी तराजूची दोन्ही पारडी समतोल झाली तर वरील शब्दाचे पहिले अक्षर ‘क’ लिहा. तराजूचे डावे पारडे जर वर गेले तर ‘अ’ लिहा आणि जर उजवे पारडे वर गेले तर ‘ब’ लिहा. अशा रीतीने आपल्याला तीन अक्षरी शब्दांचे पहिले अक्षर मिळेल.

तराजूची पारडी		
वजन	**डावे पारडे**	**उजवे पारडे**
१	अअब+अबअ+अबब+अबक	बबक+बकअ+बकब+बकक
२	अअब+कअअ+कअब+कअक	अबअ+अबब+अबक+बबक
३	अबअ+बकअ+कअअ+ककअ	अअब+अबब+बकब+कअब

तक्ता १.१

४) दुसरे वजन करताना तराजूची दोन्ही पारडी समतोल झाली तर वरील शब्दाचे दुसरे अक्षर 'क' लिहा. जर डावे पारडे वर गेले तर 'अ' लिहा व जर उजवे पारडे वर गेले तर 'ब' लिहा. अशा रीतीने आपल्याला वरील ३ अक्षरी शब्दाचे दुसरे अक्षर मिळेल.

५) तिसऱ्या वजनाच्या वेळी तराजूची दोन्ही पारडी समतोल झाल्यास वरील शब्दाचे तिसरे अक्षर 'क' लिहा. जर डावे पारडे वर गेले तर 'अ' लिहा व जर उजवे पारडे वर गेले तर 'ब' लिहा.

६) अशा रीतीने आपल्याला आता ३ अक्षरी शब्द मिळालेला आहे. हा शब्द आपण १२ नाण्यांना दिलेल्या नावात दिसतो आहे का ते पाहा. जर तो शब्द दिसला तर त्या नावाचे नाणे **खोटे** आहे व ते **कमी वजनाचे** आहे असा निष्कर्ष निघतो. जर वरील तीन अक्षरी शब्द आपण नाण्यांना दिलेल्या नावात दिसला नाही तर या शब्दात आपल्याला एक बदल करावा लागेल. वरील तीन अक्षरी शब्द घेऊन त्यात 'अ'च्या ऐवजी 'ब' आणि 'ब'च्या ऐवजी 'अ' अशी अक्षरे घालून नवीन तीन अक्षरी शब्द तयार करा. या नवीन शब्दाचे नाव असलेले नाणे **खोटे** असून ते **जास्त वजनाचे** आहे असा निष्कर्ष निघतो.

७) उदाहरणादाखल, जर तराजूचे डावे पारडे पहिल्या वजनाच्या वेळी वर गेले, दुसऱ्या वजनाच्या वेळी खाली गेले व तिसऱ्या वजनाच्या वेळीही खाली गेले तर आपल्याला 'अबब' असा तीन अक्षरी शब्द मिळतो. हा शब्द आपण नाण्यांना दिलेल्या नावात आढळतो म्हणून 'अबब' नावाचे नाणे **खोटे** असून ते **कमी वजनाचे** आहे.

८) आणखी एक उदाहरण घेऊ. पहिल्या वजनाच्या वेळी तराजूचे डावे पारडे वर गेले आणि दुसऱ्या व तिसऱ्या वजनाच्या वेळी पारडी समतोल राहिली तर आपल्याला 'अकक' असा तीन अक्षरी शब्द मिळतो. हा शब्द आपण नाण्यांना दिलेल्या नावात आढळत नाही. त्यामुळे 'अ'च्या ऐवजी 'ब' टाकून हा शब्द 'बकक' असा होतो म्हणून बकक हे **खोटे** नाणे असून ते **वजनाने जड** आहे असा निष्कर्ष निघतो.

पद्धती – २

१) सर्व नाण्यांना खालीलप्रमाणे नावे द्या.

अ, आ, इ, ई, उ, ऊ, ए, ऐ, ओ, औ, अं, अः

२) तक्ता १.२ प्रमाणे तीन वेळा वजने करा.

	पारड्याची बाजू	
	डावी बाजू	**उजवी बाजू**
पहिले वजन	अ+आ+इ+ई	उ+ऊ+ए+ऐ
दुसरे वजन	अ+ऐ+ओ+अं	इ+ई+उ+औ
तिसरे वजन	इ+ए+ओ+अः	अ+ई+ऊ+अं

तक्ता १.२

३) प्रत्येक वजनाला एक किंमत खालीलप्रमाणे द्या. वजन करतेवेळी जर डावे पारडे खाली गेले तर ती किंमत १ अशी द्या. जर डावे पारडे वर गेले तर ती किंमत –१ अशी द्या आणि जर दोन्ही पारडी समतोल राहिली तर ती किंमत ० अशी द्या.

४) तिन्ही वजनांच्या किमतीचा एक ३ आकडी समूह आपल्याला मिळेल. हा समूह तक्ता १.३ मध्ये कोठे आहे ते पाहा. तक्त्यातील ज्या नाण्याच्या नावाच्या आडव्या ओळीत हा समूह आढळेल ते नाणे **खोटे** आहे. हा समूह जड नाण्यांच्या उभ्या स्तंभात आढळला तर ते नाणे **जड** आहे व जर तो हलक्या नाण्यांच्या उभ्या स्तंभात आढळला तर ते नाणे **हलके** आहे असा निष्कर्ष निघतो.

५) उदाहरणार्थ, जर पहिल्या वजनाच्या वेळी डावे पारडे खाली गेले, दुसऱ्या वजनात दोन्ही पारडी समतोल राहिली व तिसऱ्या वजनात डावे पारडे वर गेले तर आपल्याला किमतीचा १ ० –१ असा समूह मिळतो. हा समूह तक्ता १.३ मध्ये 'ए' या नाण्याच्या आडव्या ओळीत हलक्या नाण्यांच्या उभ्या स्तंभात दिसतो म्हणून 'ए' नाणे **खोटे** असून ते वजनाने **हलके** आहे असा निष्कर्ष निघतो.

नाण्याचे नाव	वजन क्रमांक					
	१	२	३	१	२	३
अ	१	१	−१	−१	−१	१
आ	१	०	०	−१	०	०
इ	१	−१	१	−१	१	−१
ई	१	−१	−१	−१	१	१
उ	−१	−१	०	१	१	०
ऊ	−१	०	−१	१	०	१
ए	−१	०	१	१	०	−१
ऐ	−१	१	०	१	−१	०
ओ	०	१	०	०	−१	०
औ	०	−१	०	०	१	०
अं	०	१	−१	०	−१	१
अ:	०	०	१	०	०	−१
	जड			हलके		

तक्ता १.३

पद्धती ३

नाण्यांना खालीलप्रमाणे नावे द्या.

अ, ब, क, ड, ए, फ, ग, ह, इ, ज, क, ल

तक्ता १.४ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे वजने करा. तक्त्यात शेवटच्या स्तंभात दाखविल्याप्रमाणे निष्कर्ष काढा. उदाहरणार्थ आपल्याला तीन वजनांत खालीलप्रमाणे जर स्थिती आढळून आली –

अ + ब + क + ड > ए + फ + ग + ह

अ + ब + ए < क + फ + ल

क > ल

तर 'क' हे नाणे **खोटे** असून ते वजनाने **जड** आहे असा निष्कर्ष निघतो.

पहिले वजन	दुसरे वजन	तिसरे वजन
	अ+इ = ज+क	अ < ल, (ल जड) अ > ल, (ल हलके)
अ+ब+क+ड = ए+फ+ग+ह	अ+इ < ज+क	ज = क, (इ हलके) ज < क, (क जड) ज > क, (ज जड)
	अ+इ > ज+क	ज = क, (इ जड) ज < क, (ज हलके) ज > क, (क हलके)
अ+ब+क+ड > ए+फ+ग+ह	अ+ब+ए = क+फ+ल	ग = ह, (ड जड) ग < ह, (ग हलके) ग > ह, (ह हलके)
	अ+ब+ए < क+फ+ल	क = ल, (ए हलके) क > ल, (क जड)
	अ+ब+ए > क+फ+ल	अ = ब, (फ हलके) अ < ब, (ब जड) अ > ब, (अ जड)
अ+ब+क+ड < ए+फ+ग+ह	अ+ब+ए = क+फ+ल	ग = ह, (ड हलके) ग < ह (ह जड) ग > ह, (ग जड)
	अ+ब+ए < क+फ+ल	अ = ब, (फ जड) अ < ब, (अ हलके) अ > ब, (ब हलके)
	अ+ब+ए > क+फ+ल	क = ल, (ए जड) क < ल, (क हलके)

तक्ता १.४

पद्धती ४

१) नाण्यांना खालील बारा अक्षरे वापरून नावे द्या.

ये रे पा व सा तु ला दे ई न पै का

तक्ता १.५ मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे दोन्ही पारड्यांत नाणी टाकून तीन वजने करा.

	डावे पारडे	उजवे पारडे
पहिले वजन	सा + न + ये + ला	दे + ई + पै + का
दुसरे वजन	पै + न + ये + ला	सा + रे + पा + व
तिसरे वजन	ये + पा + दे + तु	रे + न + पै + का

तक्ता १.५

२) तिन्ही वजनांत जी पारडी खाली जातील त्यातील चारी नाण्यांच्या अक्षरसमूहाभोवती एक वर्तुळ काढा.

३) जिथे पारडी समतोल राहतील त्या पारड्यांत असणाऱ्या नाण्यांची अक्षरे पाहा व ती वर्तुळात असलेल्या सर्व अक्षरसमूहात अधोरेखित करा.

यापुढे आपल्याला समतोल राहिलेल्या पारड्यांमधील अक्षरसमूहांचा विचार करावयाचा नाही.

४) ज्या अक्षरसमूहांभोवती वर्तुळं काढलेली असतील त्यांच्यामध्ये असे एक अक्षर आहे का जे या सर्व अक्षरसमूहांमध्ये आहे, परंतु अधोरेखित नाही, याचा विचार करा. तसे असल्यास ते नाणे **खोटे** असून वजनाने **जड** आहे असा निष्कर्ष काढावा. वरीलप्रमाणे अक्षर न मिळाल्यास वर्तुळे **न** काढलेल्या सर्व अक्षरसमूहांमध्ये असे एक अक्षर आहे का की जे अधोरेखित नाही त्याचा विचार करावा. तसे असल्यास ते नाणे **खोटे** असून ते वजनाने **हलके** आहे असा निष्कर्ष काढावा.

५) उदाहरणार्थ, तीन वजने केल्यानंतर निरीक्षणे तक्ता १.६ प्रमाणे असल्यास खाली गेलेल्या पारड्यांच्या अक्षरसमूहांभोवती म्हणजे 'सा रे पा व' आणि 'ये पा दे तु' यांच्याभोवती वर्तुळे काढली. समतोल राहिलेल्या पारड्यांमध्ये 'सा न ये ला' आणि 'दे ई पै का' ही अक्षरे आहेत.

वर्तुळात असलेल्या अक्षरसमूहांत वरीलपैकी जी अक्षरे मिळतील ती शोधून अधोरेखित

केली. वर्तुळात असलेले अक्षरसमूह आता खालीलप्रमाणे दिसतील.

(सा रे पा व)   (ये पा दे तु)

वरील दोन्ही अक्षर समूहात असलेले व अधोरेखित नसलेले अक्षर 'पा' आहे. म्हणून 'पा' नाणे **खोटे** असून ते वजनाने **जड** आहे असा निष्कर्ष निघतो.

	डावे पारडे	उजवे पारडे	निरीक्षण
पहिले वजन	सा + न + ये + ला	दे + ई + पै + का	समतोल
दुसरे वजन	पै + न + ये + ला	सा + रे + पा + व	उजवे पारडे खाली
तिसरे वजन	ये + पा + दे + तु	रे + न + पै + का	डावे पारडे खाली

तक्ता १.६

६) आता आणखी एक उदाहरण घेऊया. तीन वजने केल्यानंतर निरीक्षणे तक्ता १.७ प्रमाणे असल्यास उजव्या पारड्यातील अक्षरसमूहांभोवती आपण वर्तुळे काढूया.

	डावे पारडे	उजवे पारडे	निरीक्षण
पहिले वजन	सा + न + ये + ला	दे + ई + पै + का	उजवे पारडे खाली
दुसरे वजन	पै + न + ये + ला	सा + रे + पा + व	उजवे पारडे खाली
तिसरे वजन	ये + पा + दे + तु	रे + न + पै + का	उजवे पारडे खाली

तक्ता १.७

७) कोणत्याच वजनांमध्ये पारडी समतोल न झाल्याने आपल्याला कोणतीच अक्षरे अधोरेखित करावयाची नाहीत. वर्तुळं काढलेले अक्षरसमूह खालीलप्रमाणे आहेत –

(दे ई पै का)   (सा रे पा व)   (रे न पै का)

या तिन्ही अक्षरसमूहांमध्ये असून अधोरेखित न केलेले कोणतेच अक्षर नाही. वर्तुळे न काढलेले अक्षरसमूह खालीलप्रमाणे आहेत –

सा न ये ला   पै न ये ला   ये पा दे तु

या सर्व अक्षरसमूहांमध्ये असलेले व अधोरेखित न केलेले अक्षर 'ये' असे आहे म्हणून 'ये' नाणे **खोटे** असून ते वजनाने **हलके** आहे, असा निष्कर्ष निघतो.

पद्धती ५

आपण एखादी संख्या व्यक्त करताना दहा अंकी पद्धत म्हणजे १ ते ९ हे अंक व ० वापरतो. जेव्हा आपण १४५३ अशी संख्या लिहितो तेव्हा या संख्येची किंमत त्यातील अंकांच्या स्थानावर खालीलप्रमाणे असते –

सहस्त्रम्	शतम्	दहम्	एकम्
१	४	५	३

म्हणजेच

$$(१ \times १०^{३}) + (४ \times १०^{२}) + (५ \times १०^{१}) + (३ \times १०^{०})$$

तसे पाहिले तर एखादी संख्या व्यक्त करण्याकरिता दहा अंकांची जरुरी असतेच असे नाही.

०, १ व २ असे तीन अंक वापरून एखादी संख्या व्यक्त करता येते. या तीन अंकी पद्धतीत एखादी संख्या आपण २१०१ अशी लिहिली तर या पद्धतीत तिची किंमत खालीलप्रमाणे ६४ अशी होईल.

$$(२ \times ३^{३}) + (१ \times ३^{२}) + (० \times ३^{१}) + (१ \times ३^{०})$$

$$= ५४ + ९ + ० + १ = ६४$$

बारा नाण्यांचे कोडे वरील तीन अंकी पद्धतींचा वापर करून सोडविता येते.

१) प्रथम सर्व नाण्यांना दहा अंकी पद्धतीप्रमाणे १ ते १२ असे क्रमांक देऊया. आणखी दोन प्रकारच्या क्रमांकांची पण आपल्याला जरुरी लागेल. दुसऱ्या प्रकारच्या क्रमांकाकरिता आपण वर वर्णन केल्याप्रमाणे तीन अंकी पद्धत वापरून नाण्यांना क्रमांक देऊया. आणखी जास्तीच्या म्हणजे तिसऱ्या क्रमांकाचीही जरुरी आहे. त्याकरिता तीन अंकी पद्धतीच्या क्रमांकामध्ये ० ऐवजी २ आणि २ ऐवजी ० लिहून हे क्रमांक तयार करूया. आता प्रत्येक नाण्याचे तिन्ही क्रमांक तक्ता १.८ मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे दिसतील.

२) वरील तीन अंकी पद्धतीच्या आणि जास्तीच्या क्रमांकांमध्ये आपण घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने आणि घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने असा एक फरक करणार आहोत. ज्या क्रमांकामध्ये डावीकडून उजवीकडे बघताना अंकामधला पहिला बदल ० ते १, १ ते २ किंवा २ ते ० असा झाला आहे ते क्रमांक घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने समजावयाचे. इतर क्रमांक हे घड्याळाच्या काट्याच्या विरुद्ध दिशेने समजावयाचे.

३) उदाहरणार्थ, ००१ मध्ये असा पहिला बदल ० ते १ असा झाला आहे किंवा २०२

मध्ये असा पहिला बदल २ ते ० असा झाला आहे. हे क्रमांक घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने समजावयाचे.

४) तक्ता १.८ मध्ये घड्याळाच्या काट्याच्या **विरुद्ध** दिशेचे क्रमांक अधोरेखित केले आहेत. अशा रीतीने १ ते १२ यामधील प्रत्येक क्रमांकाला दोन ३ अंकी क्रमांक मिळालेले आहेत व त्यापैकी एका घड्याळाच्या काट्याच्या दिशेने तर दुसरा विरुद्ध दिशेने आहे.

दहा अंकी पद्धत क्रमांक	**तीन अंकी पद्धत क्रमांक**	**जास्तीचा क्रमांक**
१	००१	२२१
२	००२	२२०
३	०१०	२१२
४	०११	२११
५	०१२	२१०
६	०२०	२०२
७	०२१	२०१
८	०२२	२००
९	१००	१२२
१०	१०१	१२१
११	१०२	१२०
१२	११०	११२

तक्ता १.८

५) आता खालीलप्रमाणे वजने करूया.

पहिले वजन – डावे पारडे, नाणी – १ + ३ + ४ + ५

– उजवे पारडे, नाणी – २ + ६ + ७ + ८

एका कागदावर आपण आता एक तीन अंकी संख्या लिहिणार आहोत. पहिल्या वजनात जर उजवे पारडे खाली गेले तर या तीन अंकी संख्येचा पहिला अंक २ असा लिहा. जर डावे पारडे खाली गेले तर तो अंक ० असा लिहा. जर पारडी समतोल राहिली तर तो १ असा लिहा. अशा रीतीने तीन अंकी संख्येचा पहिला अंक आपल्याला मिळेल.

६) दुसरे वजन – डावे पारडे, नाणी – १ + ६ + ७ + ८
– उजवे पारडे, नाणी – २ + ९ + १० + ११

वरीलप्रमाणे उजवे किंवा डावे पारडे खाली गेल्यास २ किंवा ० आणि पारडी समतोल राहिल्यास १ असा अंक आपल्याला तीन अंकी संख्येचा दुसरा अंक म्हणून मिळेल.

७) तिसरे वजन – डावे पारडे, नाणी– २ + ३ + ८ + ११
– उजवे पारडे, नाणी – ५ + ६ + ९ + १२

वरीलप्रमाणे तीन अंकी संख्येचा तिसरा अंक मिळवा.

८) या तीन अंकी संख्येची तक्ता १.८ मधील क्रमांकांशी तुलना करावी. अधोरेखित न केलेल्या एखाद्या क्रमांकाबरोबर वरील संख्या जुळल्यास त्या क्रमांकाचे नाणे **खोटे** असून ते वजनात **जड** आहे असा निष्कर्ष निघतो. अधोरेखित केलेल्या एखाद्या क्रमांकाशी वरील संख्या जुळल्यास त्या क्रमांकाचे नाणे **खोटे** असून ते वजनाने **हलके** आहे, असा निष्कर्ष निघतो.

९) उदा., ७ क्रमांकाचे नाणे **खोटे** असून जर ते वजनाने **जड** असेल तर पहिल्या वजनात उजवे पारडे खाली जाईल, दुसऱ्या वजनात डावे पारडे खाली जाईल आणि तिसऱ्या वजनात पारडी समतोल राहतील व आपल्याला तीन अंकी संख्या २०१ अशी मिळेल.

तक्त्यामध्ये ही संख्या अधोरेखित नाही व ७ व्या क्रमांकावर आहे. यावरून ७ क्रमांकाचे नाणे **खोटे** असून ते वजनाने **जड** आहे असा निष्कर्ष निघतो व तो बरोबर आहे.

पद्धती ६

१) बारा नाण्यांना १ ते १२ क्रमांक द्या व तक्ता १.९ मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे तीन वजने करा.

	डावे पारडे	**उजवे पारडे**
पहिले वजन	४ + ८ + १० + ११	१ + २ + ५ + ७
दुसरे वजन	२ + ४ + ७ + १२	३ + ५ + ६ + ११
तिसरे वजन	५ + ६ + १० + १२	७ + ८ + ९ + ११

तक्ता १.९

२) यापुढे आपल्याला चार अंकांची बेरीज करावयाची आहे. पहिला अंक ० धरूया व यात आणखी तीन अंक (त्यांची + किंवा – ही चिन्हे लक्षात घेऊन) मिळवूया.

३) जर पहिल्या वजनात डावे पारडे खाली गेले तर दुसरा अंक –१ असेल व डावे पारडे वर गेले तर तो +१ असेल.

४) जर दुसऱ्या वजनात डावे पारडे खाली गेले तर तिसरा अंक –३ असेल व डावे पारडे वर गेले तर +३ असेल.

५) जर तिसऱ्या वजनात डावे पारडे खाली गेले तर चौथा अंक –९ असेल व डावे पारडे वर गेले तर तो +९ असेल.

६) अशा रीतीने ० मध्ये वरील तीन अंक त्यांची चिन्हे लक्षात ठेवून मिळवूया.

७) ही बेरीज तिचे चिन्ह लक्षात न घेता १ ते १२ या दरम्यान होईल व त्या क्रमांकाचे नाणे **खोटे** आहे असा निष्कर्ष निघेल.

तिन्ही वजनांच्या निरीक्षणाकडे लक्ष दिल्यास या क्रमांकाचे नाणे टाकलेले पारडे खाली अथवा वर जाते असे आढळेल व त्यावरून ते वजनाला **जड** किंवा **हलके** आहे त्याबद्दल निष्कर्ष काढता येईल.

८) उदाहरणार्थ, बेरजेच्या सुरुवातीचा अंक **०** धरूया. जर ५ व्या क्रमांकाचे नाणे खोटे असून ते वजनाने जड असल्यास पहिल्या वजनात डावे पारडे वर जाईल आणि बेरजेकरिता दुसरा अंक +**१** मिळेल. दुसऱ्या वजनात डावे पारडे वर जाईल व बेरजेकरिता तिसरा अंक +**३** मिळेल. तिसऱ्या वजनात डावे पारडे खाली जाईल व बेरजेकरिता चौथा अंक –**९** मिळेल. सर्व मिळून बेरीज ० + १ + ३ – ९ = – ५

५ क्रमांकाचे नाणे **खोटे** आहे असा निष्कर्ष निघतो. पहिल्या वजनात ५ क्रमांकाचे नाणे असलेले पारडे खाली गेले होते म्हणजे ते नाणे **जड** आहे असा निष्कर्ष निघेल.

पद्धती ७

१) बारा नाण्यांना १ ते १२ क्रमांक द्या व तक्ता १.१० मध्ये दाखविल्याप्रमाणे वजने करा.

	डावे पारडे	**उजवे पारडे**
पहिले वजन	१ + २ + ७ + १०	३ + ४ + ६ + ९
दुसरे वजन	१ + ३ + ८ + ११	२ + ५ + ६ + ७
तिसरे वजन	२ + ३ + ९ + १२	१ + ४ + ५ + ८

तक्ता १.१०

२) आता एक तीन अक्षरी शब्द बनवा.

तीन अक्षरी शब्द	खोटे नाणे	जड/ हलके
डाडाउ	१	जड
उउडा	१	हलके
डाउडा	२	जड
उडाउ	२	हलके
उडाडा	३	जड
डाउउ	३	हलके
उसउ	४	जड
डासडा	४	हलके
सउउ	५	जड
सडाडा	५	हलके
उउस	६	जड
डाडास	६	हलके
डाउस	७	जड
उडास	७	हलके
सडाउ	८	जड
सउडा	८	हलके
उसडा	९	जड
डासउ	९	हलके
डासस	१०	जड
उसस	१०	हलके
सडास	११	जड
सउस	११	हलके
ससडा	१२	जड
ससउ	१२	हलके

तक्ता १.११

३) पहिल्या वजनात डावे पारडे खाली गेल्यास वरील तीन अक्षरी शब्दाचे पहिले अक्षर ‘डा’ असे असेल. उजवे पारडे खाली गेल्यास ते ‘उ’ असे असेल. दोन्ही पारडे समतोल राहिल्यास ते ‘स’ असे असेल.

४) दुसऱ्या व तिसऱ्या वजनातही वरीलप्रमाणे डावे पारडे खाली अथवा उजवे पारडे खाली किंवा दोन्ही पारडी समतोल असतील, त्याप्रमाणे तीन अक्षरी शब्दांचे दुसरे व तिसरे अक्षर मिळवा.

५) वरील शब्द आता तक्ता १.११ मध्ये शोधा. त्यावरून खोट्या नाण्याचा क्रमांक व ते जड वा हलके आहे ते कळेल.

६) उदाहरणार्थ, ७ क्रमांकाचे नाणे **खोटे** असून ते **जड** असल्यास पहिल्या वजनात डावे पारडे खाली जाऊन आपल्याला पहिले अक्षर ‘डा’ असे मिळेल. दुसऱ्या वजनात

उजवे पारडे खाली जाऊन आपल्याला ‘उ’ असे अक्षर मिळेल. तिसऱ्या वजनात पारडी समतोल राहतील व आपल्याला ‘स’ असे अक्षर मिळेल. अशा रीतीने आपल्याला तीन अक्षरी शब्द ‘डाउस’ असा मिळेल. तक्त्यामध्ये या शब्दाच्या आडव्या ओळीत ५ क्रमांकाचे नाणे दाखविले आहे व ते **जड** आहे हे दिसेल.

पद्धती ८

एके काळी जेव्हा आकडेमोडीची यंत्रे उपलब्ध नव्हती तेव्हा तंत्रज्ञ व शास्त्रज्ञ सरकपट्टी (Slide Rule) वापरीत असत. बारा नाण्यांचे कोडे सोडविणारी सरकपट्टी आपण सहज तयार करू शकता. आकृती १.१ मध्ये ही सरकपट्टी दाखविली आहे. या पट्टीवर एक दर्शक (Cursor) असून तो सरकपट्टीवर सरकविता येतो. सरकपट्टीवर एकूण चार पातळ्या असून खालील तीन पातळीवर नाण्यांची तीन वजने कशी करावयाची ते दर्शविले आहे. सर्वात वरच्या चौथ्या पातळीवर वेगवेगळे निष्कर्ष दाखविले आहेत.

१) पहिले वजन

सर्वात खालच्या पातळीवर दाखविलेल्या + या खुणेवर दर्शकाची उभी रेषा येईल अशा

१ ह	६ ज	२ ह	८ ज	४ ह	७ ज		३ ह	५ ज	९ ह	११ ज	१० ह	१२ ह		१२ ज	१० ज	११ ह	९ ज	५ ह	३ ज		७ ह	४ ज	८ ह	२ ज	६ ह	१ ज
१	+	२	७	+	८	५	+	१०	९	+	१०	१२	+	१	९	+	१०	५	+	१०	७	+	८	१	+	२
१	२	५		+		३	६	१२	१	९	१०		+		३	४	११	१	२	५		+		३	६	१२
								१	२	३	४		+		५	६	७	८								

आकृती १.१

रीतीने दर्शक सरकपट्टीवर सरकवा, म्हणजे पहिले वजन नाणी क्रमांक १,२, ३, ४ (डाव्या पारड्यात) आणि ५, ६, ७, ८ (उजव्या पारड्यात) मध्ये करावयाचे आहे ते कळेल. कोणते पारडे वर जाईल ते ध्यानात ठेवावे म्हणजे त्या दिशेने दर्शक सरकवावा लागेल. समजा **उजवे** पारडे वर गेले तर दर्शक **उजव्या** बाजूला सरकवावा. त्यानंतर खालून दुसऱ्या पातळीवर दर्शकाची उभी रेषा नाणे क्रमांक १,२ ५ आणि ३, ६, १२ यांच्यामधील + चिन्हावर स्थिरावेल.

२) दुसरे वजन

दुसरे वजन अर्थातच वर दर्शविलेल्या नाण्यांमध्ये म्हणजे १, २, ५ (डाव्या पारड्यात) व ३, ६, १२ (उजव्या पारड्यात) यांमध्ये करावयाचे आहे. परत कोठले पारडे वर जाते ते पाहावे. समजा, **डावे** पारडे वर गेले तर दर्शक **डाव्या** बाजूला सरकवावा म्हणजे त्यावरील उभी रेषा आता खालून तिसऱ्या पातळीवरील नाणे क्रमांक ५ आणि १० यांमधील + चिन्हावर स्थिरावेल.

३) तिसरे वजन

तिसरे व शेवटचे वजन आता नाणे क्रमांक ५ (डाव्या पारड्यात) व १० (उजव्या पारड्यात) यामध्ये करावयाचे. कोणते पारडे वर जाते ते पाहून त्या दिशेला दर्शक सरकवावा. समजा, **डावे** पारडे वर गेले तर दर्शक **डाव्या** दिशेला सरकवावा. आता दर्शकाची उभी रेषा चौथ्या पातळीत ५ ह वर स्थिरावेल. ५ क्रमांकाचे नाणे **खोटे** असून ते वजनाने **हलके** आहे, असा निष्कर्ष त्यातून निघेल. (आणखी एक ध्यानात ठेवण्याची गोष्ट म्हणजे पारडी समतोल राहिली तर दर्शक कोणत्याही बाजूला न सरकविता वरील पातळीवर जाऊन पुढचे वजन त्या पातळीवर दर्शविल्याप्रमाणे करावे.)

पद्धती ९

१) सर्व नाण्यांना १ ते १२ क्रमांक द्या.

तक्ते १.१२ ते १.१४ प्रमाणे वजने करून निष्कर्ष काढा.

	डावे पारडे	उजवे पारडे	निरीक्षण	
पहिले वजन	१+२+३+४	५+६+७+८	पारडी समतोल	तक्ता १.१३ पाहा
			पारडी असमतोल खाली गेलेल्या पारड्यातील नाण्यांना ज१, ज२, ज३ आणि ज४ अशी नावे द्या. वर गेलेल्या पारड्यातील नाण्यांना ह१, ह२, ह३ आणि ह४ अशी नावे द्या.	तक्ता १.१४ पाहा

तक्ता १.१२

	डावे पारडे	उजवे पारडे	निरीक्षण	तिसरे वजन		निरीक्षण	निष्कर्ष
				डावे पारडे	उजवे पारडे		
दुसरे वजन	९+१०+११	१+२+३	डावे पारडे खाली	९	१०	डावे पारडे खाली	९ जड
						पारडी समतोल	११ जड
						डावे पारडे वर	१० जड
			पारडी समतोल	१२	४	डावे पारडे खाली	१२ जड
						डावे पारडे वर	१२ हलके
			डावे पारडे वर	९	१०	डावे पारडे खाली	१० हलके
						पारडी समतोल	११ हलके
						डावे पारडे वर	९ हलके

तक्ता १.१३

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">डावे पारडे</th><th rowspan="2">उजवे पारडे</th><th rowspan="2">निरीक्षण</th><th colspan="2">तिसरे वजन</th><th rowspan="2">निरीक्षण</th><th rowspan="2">निष्कर्ष</th></tr>
<tr><th>डावे पारडे</th><th>उजवे पारडे</th></tr>
<tr><td rowspan="8">दुसरे वजन</td><td rowspan="8">ज१+ज२+ह१</td><td rowspan="8">ज३+ज४ +ह२</td><td rowspan="3">डावे पारडे खाली</td><td rowspan="3">ज१</td><td rowspan="3">ज२</td><td>डावे पारडे खाली</td><td>ज१ जड</td></tr>
<tr><td>पारडी समतोल</td><td>ह२ हलके</td></tr>
<tr><td>डावे पारडे वर</td><td>ज२ जड</td></tr>
<tr><td rowspan="2">पारडी समतोल</td><td rowspan="2">ह३</td><td rowspan="2">ह४</td><td>डावे पारडे खाली</td><td>ह४ हलके</td></tr>
<tr><td>डावे पारडे वर</td><td>ह३ हलके</td></tr>
<tr><td rowspan="3">डावे पारडे वर</td><td rowspan="3">ज३</td><td rowspan="3">ज४</td><td>डावे पारडे खाली</td><td>ज३ जड</td></tr>
<tr><td>पारडी समतोल</td><td>ह१ हलके</td></tr>
<tr><td>डावे पारडे वर</td><td>ज४ जड</td></tr>
</table>

तक्ता १.१४



अमूर्त चित्र ९

प्रकरण २

ही दुनिया जादुभरी

मनात धरलेली एखादी संख्या किंवा बावन्न पत्त्यांपैकी एक पत्ता ओळखून दाखववावयाचा आहे का? पुठ्ठ्यांचे चौरस वापरून ह्या प्रकारची जादू तयार करता येते. याकरिता वेगवेगळ्या आकृतींमध्ये दाखविल्या प्रकारे पातळ पुठ्ठ्यांचे चौकोन कापून घ्यावे लागतील. टिकाऊपणाकरिता त्यांना लॅमिनेट करणे शक्य आहे.

१) खिडकी पत्र १

१०१	१०२	१०३	१०४	१०९	११०	१११	११२	११७	११८	११९	१२०	१२५	१२६	१२७	१२८
१०५	१०६	१०७	१०८	११३	११४	११५	११६	१२१	१२२	१२३	१२४	१२९	१३०	१३१	१३२
१६०	१५९	१५८	१५७	१५२	१५१	१५०	१४९	१४४	१४३	१४२	१४१	१३६	१३५	१३४	१३३
१६४	१६३	१६२	१६१	१५६	१५५	१५४	१५३	१४८	१४७	१४६	१४५	१४०	१३९	१३८	१३७

आकृती २.१

१०३ १०७ १११ ११५ ११९ १२३ १२७ १३१ १३३ १३७ १४१ १४५ १४९ १५३ १५७ १६१

१०२ १०६ ११० ११४ ११८ १२२ १२६ १३० १३६ १४० १४४ १४८ १५२ १५६ १६० १६४

१६३ १५९ १५५ १५१ १४७ १४३ १३९ १३५ १२९ १२५ १२१ ११७ ११३ १०९ १०५ १०१

१६२ १५८ १५४ १५० १४६ १४२ १३८ १३४ १३२ १२८ १२४ १२० ११६ ११२ १०८ १०४

आकृती २.२

याकरिता पुठ्याचे चार चौरस लागतील. तीन तुकड्यांमध्ये आकृती २.१ ते २.३ मध्ये काळ्या रंगाने दर्शविलेले भाग कात्रीने किंवा ब्लेडने कापून टाकून खिडक्या तयार कराव्या. पुठ्यांवर १०१ ते १६४ अंक लिहिलेले आहेत. हे अंक खिडकीवाल्या पुठ्यांच्या मागच्या बाजूंवर लिहावेत. चौथ्या पुठ्यावर खिडक्या नसून १०१ ते १६४ अंक पुढच्या बाजूवर आकृती २.४ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे लिहावेत.

११३	११४	११५	११६	१२५	१२६	१२७	१२८	१४५	१४६	१४७	१४८	१५७	१५८	१५९	१६०
१०९	११०	१११	११२	१२९	१३०	१३१	१३२	१४१	१४२	१४३	१४४	१६१	१६२	१६३	१६४
१०१	१०२	१०३	१०४	१२१	१२२	१२३	१२४	१३३	१३४	१३५	१३६	१५३	१५४	१५५	१५६
१०५	१०६	१०७	१०८	११७	११८	११९	१२०	१३७	१३८	१३९	१४०	१४९	१५०	१५१	१५२

आकृती २.३

ही जादू दाखविताना एखाद्या प्रेक्षकाला १०१ ते १६४ पैकी एखादा अंक मनात धरावयास सांगावे. त्यानंतर खिडकीवाले तीन चौरस पुठ्ठे त्याला देऊन मनात धरलेला अंक त्या पुठ्ठ्याच्या मागच्या बाजूवर शोधून तो अंक चौरसाच्या वरच्या कडेवर येईल अशा रीतीने पुठ्ठे परत करावयास सांगावे. हे पुठ्ठे एकत्र करून चौथ्या पुठ्ठ्याच्या पुढे लावल्यास मनात धरलेला अंक खिडकीमधून दिसतो. ही कृती प्रेक्षकाच्या अपरोक्ष करून त्याला त्याने मनात धरलेला अंक सांगावा.

		१०१	१०२	१०३	१०४	१०५	१०६	१०७	१०८		
		१०९	११०	१११	११२	११३	११४	११५	११६		
		११७	११८	११९	१२०	१२१	१२२	१२३	१२४		
		१२५	१२६	१२७	१२८	१२९	१३०	१३१	१३२		
		१३३	१३४	१३५	१३६	१३७	१३८	१३९	१४०		
		१४१	१४२	१४३	१४४	१४५	१४६	१४७	१४८		
		१४९	१५०	१५१	१५२	१५३	१५४	१५५	१५६		
		१५७	१५८	१५९	१६०	१६१	१६२	१६३	१६४		

आकृती २.४

२) खिडकीपत्र २

ही जादू दाखविताना प्रेक्षकाला ५२ पत्त्यांतील एक पत्ता मनात दाखवायला सांगावे. त्यानंतर आकृती २.५ ते २.७ मध्ये दाखविलेले आठ आयताकृती पुठ्ठे प्रेक्षकाला द्यावे. या पुठ्ठ्यावर पत्त्यांची नावे लिहिलेली आहेत. ज्या घरात नावे नाहीत त्या खिडक्या असून कात्री किंवा ब्लेड वापरून तयार केलेल्या आहेत. पत्त्यांच्या नावामध्ये मनात धरलेल्या पत्त्याचे नाव शोधून, ज्या पुठ्ठ्यांवर ते नाव आहे ते पुठ्ठे स्वत:कडे ठेवून बाकीचे पुठ्ठे प्रेक्षकाला परत करावयास सांगावे. हे परत केलेले पुठ्ठे एकमेकांवर रचल्यास पुठ्ठ्यांमध्ये एक खिडकी मोकळी राहते. पत्त्यांची नावे ४ ओळीत असून, पहिल्या ओळीत किलवर १ ते १०, गुलाम, राणी आणि राजा, दुसऱ्या ओळीत बदामचे वरील क्रमाने येणारे पत्ते व तिसऱ्या व चौथ्या ओळीत इस्पिक व चौकटचे वरीलप्रमाणे पत्ते असा अनुक्रम आहे. त्यामुळे जिथे रिकामी खिडकी आहे, ते स्थान कोणत्या पत्त्याचे आहे हे ओळखता येते. तोच पत्ता प्रेक्षकाने मनात धरलेला असतो.

आकृती २.५

			4♣	5♣						J♣	Q♣	K♣
						7♥						
A♠	2♠			5♠	6♠	7♠		9♠				
	2♦				6♦				10♦	J♦	Q♦	K♦

A♣	2♣		4♣		6♣	7♣		9♣		J♣		K♣
A♥		3♥	4♥				8♥		10♥	J♥		
A♠										J♠	Q♠	
							8♦					

आकृती २.६

					6♣	7♣					Q♣	
	2♥			5♥	6♥		8♥	9♥			Q♥	K♥
					6♠					J♠		
	2♦	3♦		5♦	6♦	7♦		9♦				

							8♣	9♣		J♣	Q♣	
	2♥	3♥	4♥							J♥		K♥
	2♠	3♠		5♠		7♠	8♠		10♠	J♠		
A♦		3♦	4♦					9♦				K♦

	2♣	3♣	4♣		6♣				10♣			
A♥	2♥			5♥	6♥					J♥		
			4♠	5♠			8♠	9♠			Q♠	
A♦	2♦		4♦	5♦					10♦	J♦		

आकृती २.७

A♣							8♣		10♣			K♣
A♥			4♥		6♥	7♥	8♥	9♥			Q♥	K♥
	2♠	3♠	4♠									K♠
A♦					6♦		8♦			J♦	Q♦	

३) अंक ओळखा पाहू

यात चार आयताकृती पुठ्ठ्यांचा वापर केला आहे. १ ते ८० अंकांपैकी काही अंक काळ्या व बाकीचे लाल रंगात लिहिलेले आहेत. पुठ्ठ्यांना खिडक्या नाहीत. आकृती २.८ ते २.११ मध्ये हे पुठ्ठे दाखविले आहेत. एखाद्या प्रेक्षकाला १ ते ८० पैकी एक अंक मनात धरावयास सांगावे. त्यानंतर वरील चार पुठ्ठे त्याला देऊन ज्या पुठ्ठ्यावर त्याचा अंक आहे ते पुठ्ठे परत करावयास सांगावे. या पुठ्ठ्यांवर त्याचा अंक कोणकोणत्या रंगात आहे, ते पण त्याच्याकडून जाणून घ्यावे. या माहितीचा उपयोग करून आपण प्रेक्षकाने मनात धरलेला अंक ओळखू शकतो.

आकृती २.८

१	२	४	५	७	८
१०	११	१३	१४	१६	१७
१९	२०	२२	२३	२५	२६
२८	२९	३१	३२	३४	३५
३७	३८	४०	४१	४३	४४
४६	४७	४९	५०	५२	५३
५५	५६	५८	५९	६१	६२
६४	६५	६७	६८	७०	७१
७३	७४	७६	७७	७९	८०

३	४	५	६	७	८
१२	१३	१४	१५	१६	१७
२१	२२	२३	२४	२५	२६
३०	३१	३२	३३	३४	३५
३९	४०	४१	४२	४३	४४
४८	४९	५०	५१	५२	५३
५७	५८	५९	६०	६१	६२
६६	६७	६८	६९	७०	७१
७५	७६	७७	७८	७९	८०

आकृती २.९

हा अंक ओळखण्याकरिता प्रेक्षकाने परत केलेल्या पुठ्ठ्यांमध्ये ज्या रंगात प्रेक्षकाने मनात धरलेला अंक आहे, त्या रंगातील कमीत कमी किमतीचा अंक प्रत्येक पुठ्ठ्यावर शोधून त्या अंकांची बेरीज करावी. ही बेरीज म्हणजेच प्रेक्षकाने मनात धरलेला अंक असतो.

आकृती २.१०

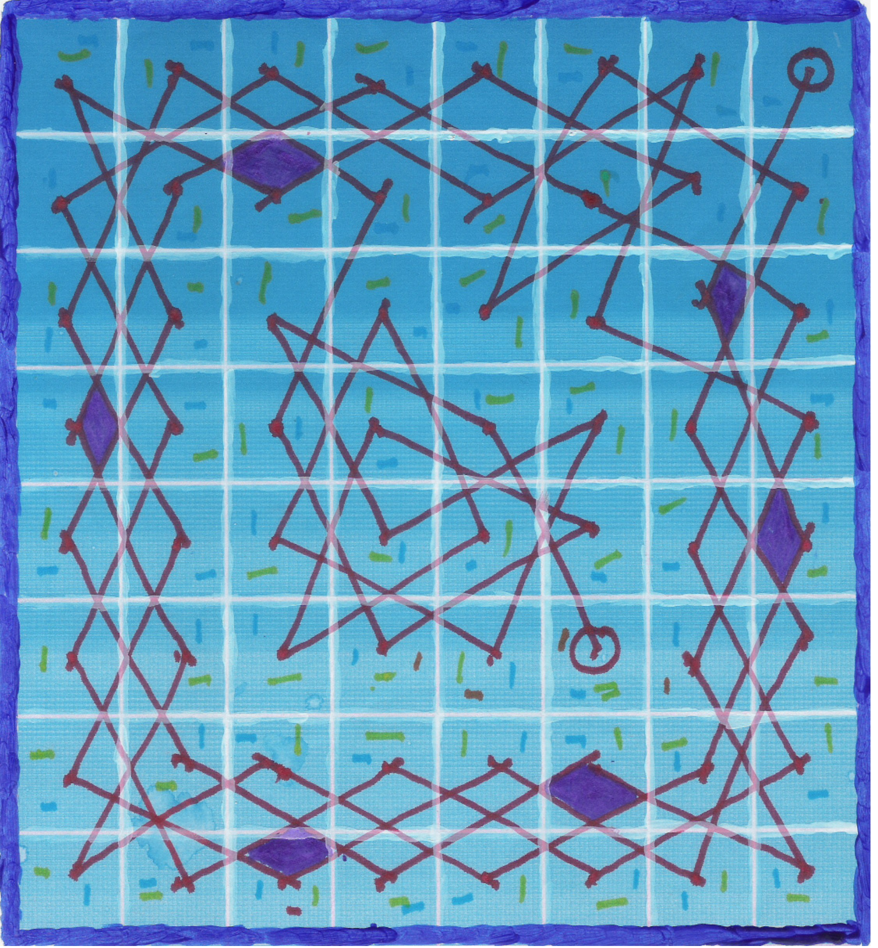
९	१०	११	१२	१३	१४
१५	१६	१७	१८	१९	२०
२१	२२	२३	२४	२५	२६
३६	३७	३८	३९	४०	४१
४२	४३	४४	४५	४६	४७
४८	४९	५०	५१	५२	५३
६३	६४	६५	६६	६७	६८
६९	७०	७१	७२	७३	७४
७५	७६	७७	७८	७९	८०

उदाहरणार्थ, प्रेक्षकाने ५२ असा अंक मनात धरला तर तो आपल्याला चारी पुठ्ठे परत करेल व पहिल्या पुठ्ठ्यावर लाल, दुसऱ्या पुठ्ठ्यावर काळा, तिसऱ्या पुठ्ठ्यावर काळा व चौथ्या पुठ्ठ्यावर लाल अशा रंगात मनात धरलेला अंक आहे असे तो प्रेक्षक आपल्याला सांगेल.

२७	२८	२९	३०	३१	३२
३३	३४	३५	३६	३७	३८
३९	४०	४१	४२	४३	४४
४५	४६	४७	४८	४९	५०
५१	५२	५३	५४	५५	५६
५७	५८	५९	६०	६१	६२
६३	६४	६५	६६	६७	६८
६९	७०	७१	७२	७३	७४
७५	७६	७७	७८	७९	८०

आकृती २.११

आपण हे पुठ्ठे पाहिल्यास पहिल्या पुठ्ठ्यावर लाल रंगात कमीत कमी किमतीचा अंक १, दुसऱ्या पुठ्ठ्यावर काळ्या रंगात कमीत कमी किमतीचा अंक ६, तिसऱ्या पुठ्ठ्यावर काळ्या रंगात कमीत कमी किमतीचा अंक १८ आणि चौथ्या पुठ्ठ्यावर लाल रंगात कमीत कमी किमतीचा अंक २७ असून या सर्व अंकांची बेरीज १+६+१८+२७ = ५२ अशी येते. हाच प्रेक्षकाने मनात धरलेला अंक असतो.



अमूर्त चित्र २

प्रकरण ३
गुंतुनी गुंत्यात साऱ्या

या प्रकारच्या कोड्यांमध्ये वेगवेगळ्या विधानांच्या गुंत्यातून एका निष्कर्षाप्रत यायचे असते. येथे आपल्या तर्कशक्तीचा चांगलाच कस लागतो. या प्रकरणात तीन कोडी दिलेली आहेत. ही कोडी सोडविताना प्रत्येक विधानाचा मतितार्थ एका तक्त्यात लिहिल्यास निष्कर्ष काढणे सोपे जाते. पहिल्या कोड्याचे उत्तर अशा तऱ्हेची पद्धत वापरून स्पष्टीकरणासह दिले आहे. बाकीची कोडी सोडविण्याकरिता या पद्धतीचा उपयोग होईल.

१) कलाकारांचा गुंता

सुरेश, नीलेश, प्रथमेश व ज्ञानेश हे चारही जण उत्तम कलाकार आहेत. त्यांच्यापैकी एकजण गायक, दुसरा नर्तक, तिसरा चित्रकार व चौथा नकलाकार आहे, पण कोणत्या व्यक्तीला कोणती कला येते हे आपल्याला माहिती नाही.

अ) सुरेश व प्रथमेश हे गायकाच्या एका मैफिलीला हजर होते.

ब) नीलेश व नकलाकार यांची चित्रे चित्रकाराने काढून प्रदर्शनात मांडली होती.

क) नकलाकाराने एका कार्यक्रमात ज्ञानेशची नक्कल फार चांगली केली होती. पुढच्या कार्यक्रमात तो सुरेशची नक्कल करणार आहे.

ड) सुरेश व प्रथमेश यांची बिलकुल ओळख नाही.

वरील विधानांचा गुंता सोडवून कोणता कलाकार कोणत्या कलेत निपुण आहे ते सांगा.

२) कौटुंबिक गुंता

एका शहरात तीन जोडपी राहत आहेत. त्यातील पुरुषांची नावे आहेत – गणेश, राजेश व मंगेश. त्यांच्या बायकांची नावे आहेत – मंदा, जयश्री व राजश्री. यांच्या मुलांची नावे आहेत – शंकर, विष्णू व कृष्णा. अर्थातच, यापैकी कोणाची कोण बायको व कोणाची कोण

मुले हे आपल्याला माहिती नाही.

अ) मंगेश हा राजश्रीचा नवरा नाही, त्याचप्रमाणे विष्णू हा त्याचा मुलगा नाही.

ब) मंदा राजेशची बायको नाही, त्याचप्रमाणे शंकरची आई नाही.

क) जर राजेश किंवा मंगेश यांचा मुलगा शंकर असेल तर राजश्री ही कृष्णाची आई आहे.

ड) जर राजश्री ही राजेशची बायको असेल तर जयश्री ही शंकरची आई नाही.

हा कौटुंबिक गुंता सोडवून प्रत्येक पुरुषाच्या बायकोचे व मुलाचे नाव आपण सांगू शकाल काय ?

३) बँकेमधील बुद्धिबळाचा गुंता

एका बँकेमधील चार व्यक्तींची ही गोष्ट. त्यांची नावे आहेत देशपांडे, रानडे, सावंत व गायकवाड. त्यापैकी एकजण प्रबंधक, दुसरा उपप्रबंधक, तिसरा हिशेब तपासनीस व चौथा लिपीक आहे, पण यातील कोणती व्यक्ती कोणत्या स्थानावर आहे ते माहिती नाही.

अ) लिपीक उपप्रबंधकाबरोबर नेहमी बुद्धिबळ खेळतो व दर वेळी हरतो.

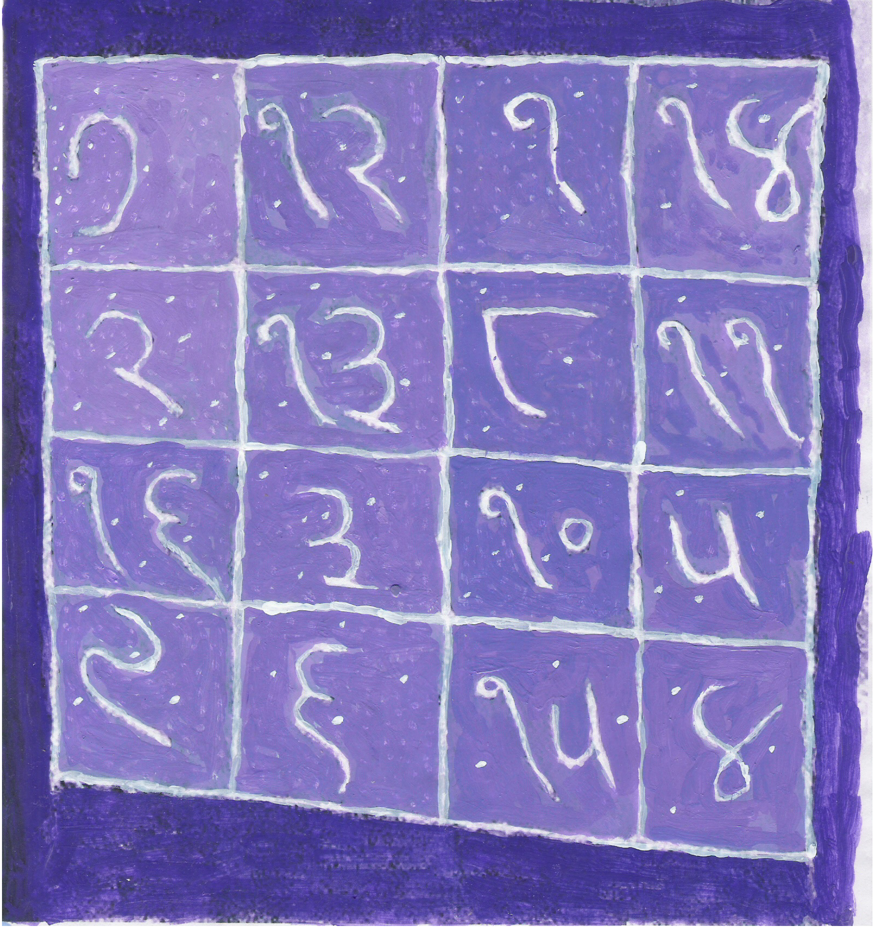
ब) हिशेब तपासनीस व उपप्रबंधक हे बुद्धिबळ खेळण्यात प्रबंधकापेक्षा जास्त निपुण आहेत.

क) सावंत व गायकवाड एकाच बिल्डिंगमध्ये बाजूबाजूला राहतात आणि दररोज संध्याकाळी न चुकता बुद्धिबळ खेळतात.

ड) रानडे बुद्धिबळ खेळण्यात सावंतांपेक्षा जास्त निपुण आहेत.

इ) प्रबंधक लिपिकाच्या जवळच राहतो; परंतु इतर कोणाच्या जवळ राहत नाही.

वरील विधानातून वाट काढून बँकेत कोणती व्यक्ती कोणत्या स्थानावर आहे ते सांगा.



अमूर्त चित्र ३

प्रकरण ४
दिशा न दिसती, वाट कळेना

चक्रव्यूहाची पहिली ओळख आपल्याला महाभारतात होते. अभिमन्यूला चक्रव्यूहात वाट काढीत आत कसे जावयाचे ते माहिती होते, पण बाहेर यावयाचे जमले नाही. आकृती ४.१ मध्ये असा एक सोपा चक्रव्यूह दाखविला आहे. वेगवेगळ्या देशात इतिहासकालीन इमारतींमध्ये बांधलेली निरनिराळ्या आकारांची चक्रव्यूहाची कोडी आपल्याला अजूनही बघावयास मिळतात व पर्यटकांना ते एक मोठे आकर्षण असते.



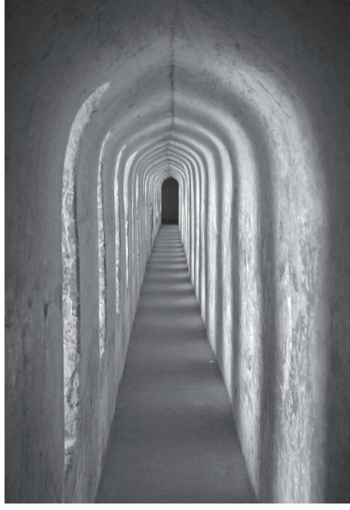
आकृती ४.१

भारतात लखनौ येथे बडा इमामबाडा ही इतिहासकालीन इमारत १७८४ साली असफ उदौला याने बांधली. या इमारतीमध्ये असलेली बोळांची चक्रव्यूहात्मक रचना म्हणजे एक आश्चर्यच म्हणावे लागेल. या चक्रव्यूहाला भूलभूलैय्या असे म्हणतात. आकृती ४.२ मध्ये भूलभूलैय्याचा एक बोळ दाखविला आहे. मार्क ट्वेनच्या 'Adventures of Tom Sawyer' या प्रसिद्ध पुस्तकात टॉम व बेकी अशाच एका नैसर्गिक रीतीने तयार झालेल्या गुंफांच्या चक्रव्यूहात हरवतात असे दाखविले आहे.

वेगवेगळ्या प्रकारचे चक्रव्यूह कसे तयार करावेत यासंबंधीची माहिती आपल्याला Jo Edkin यांच्या संकेतस्थळावर मिळते. चौरस आकाराचा व्यूह तयार करण्याच्या पद्धती

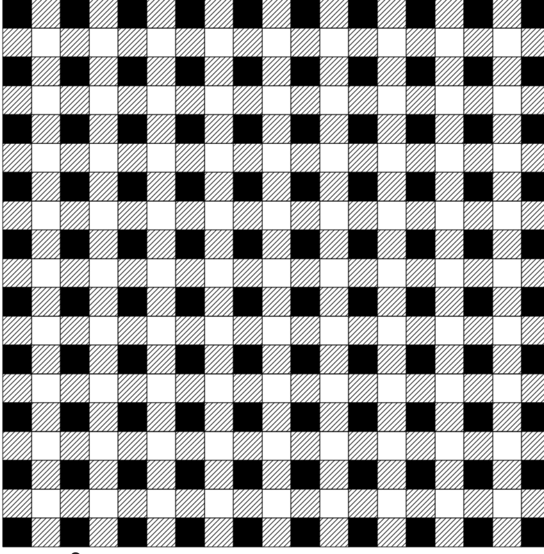
आता आपण पाहूया. ही पद्धती समजून घेण्याकरिता आपण छोट्या आकाराचा व्यूह लक्षात घेतला आहे. ती समजून घेतल्यावर मोठ्या आकाराचे व्यूह आपण तयार करू शकाल.

आकृती ४.२



१) एका कागदावर ९.५ सें.मी. × ९.५ सें.मी. आकाराचा चौरस काढून घ्या. दर $^{१}/_{२}$ सें.मी. अंतरावर आडव्या व उभ्या रेषा आखून घ्या. या चौरसात आता १९×१९ = ३६१ छोटे चौरस दिसतील. आकृती ४.३ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे यातले काही छोटे चौरस काळ्या रंगाच्या पेन्सिलीने रंगवा. काही छोट्या चौरसात आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे तिरक्या रेषा हलकेच मारा. इतर छोटे चौरस तसेच मोकळे ठेवा. हे मोकळे ठेवलेले छोटे चौरस व्यूहामध्ये प्रवेशद्वाराकडून निर्गमद्वाराकडे जाणाऱ्या मार्गावर असतील. काळ्या रंगाने रंगवलेले छोटे चौरस व्यूहामध्ये भिंतींचा भाग बनतील. ज्या छोट्या चौरसात तिरक्या रेषा आहेत ते भिंतींचा जरी भाग बनतील किंवा व्यूहामधील वर उल्लेख केलेल्या मार्गाचा एक भाग बनतील.

२) आता आपण तिरक्या रेषा मारलेले छोटे चौरस लक्षात घेऊया. काही छोट्या चौरसांमधून यातल्या तिरक्या रेषा आपल्याला खोडरबर वापरून पुसून टाकावयाच्या आहेत. काळ्या रंगाने रंगविलेल्या छोट्या चौरसांना तसेच ठेवावयाचे आहे, कारण ते चौरस भिंतींचा एक भाग बनणार आहेत. ज्या छोट्या चौरसांमधील तिरक्या रेषा पुसण्यात येतील ते चौरस

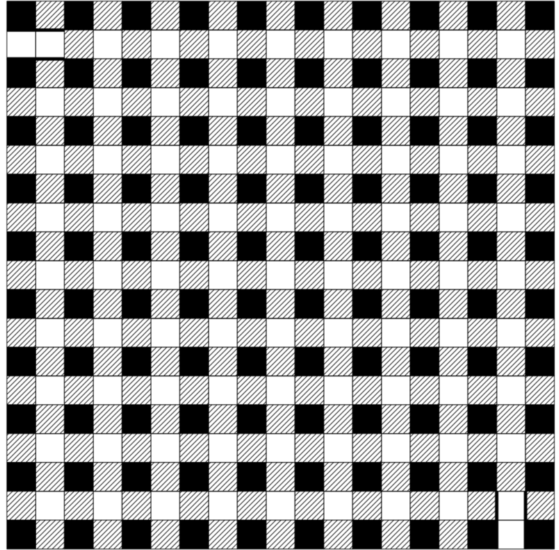


व्यूहामधील मार्गाचा एक भाग बनतील व ज्या छोट्या चौरसांमधील तिरक्या रेषा पुसण्यात येणार नाहीत ते चौरस व्यूहामधील भिंतींचा एक भाग बनतील. आता आपण व्यूहामध्ये शिरण्याकरिता एक प्रवेशद्वार व त्यातून बाहेर पडण्याकरिता एक निर्गमद्वार शोधूया. व्यूहाच्या एका टोकाला छोट्या चौरसामधील रेषा पुसून टाकून तेथे प्रवेशद्वार तयार करूया. त्याचप्रमाणे व्यूहाच्या दुसऱ्या टोकाला छोट्या चौरसामधील रेषा

आकृती ४.३

पुसून टाकून तिथे निर्गमद्वार तयार करूया. आपल्या १९×१९ च्या चौरसाच्या चारी कडांवर तिरक्या रेषा मारलेले बाकीचे छोटे चौरस आता काळ्या पेन्सिलीने रंगवा म्हणजे चारी कडांवर प्रवेशद्वार व निर्गमद्वार वगळून भिंत दिसेल. आता आपली व्यूहरचना आकृती ४.४ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे दिसेल.

३) आता आपल्याला प्रवेशद्वारापासून निर्गमद्वारापर्यंत जाणाऱ्या मुख्य मार्गासंबंधी



आकृती ४.४

विचार करावयाचा आहे. प्रवेशद्वारापासून सुरुवात करून छोट्या चौरसांमधील तिरक्या रेषा पुसून टाकून हा मुख्य मार्ग तयार करणे आहे. हा मार्ग शेवटी निर्गमद्वारापर्यंत जाऊन संपला पाहिजे. आकृती ४.५ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे हा मुख्य मार्ग तयार केलेला आहे, तो काळ्या रंगात दाखविला आहे; परंतु आपण आपल्या पसंतीचा मुख्य मार्ग तयार करू शकता. हा मुख्य मार्ग फार सोपा न करता वळणावळणांचा तयार करावा.

आकृती ४.५

४) आता मुख्य मार्गाला मिळणारे छोटे छोटे दुसरे मार्ग तयार करणे आहे. हे मार्ग असे असतील की, मुख्य मार्ग सोडून या मार्गावर गेल्यास फसवणूक होईल. कारण त्या मार्गांच्या शेवटी भिंत लागेल. पुढे जाता येणार नाही व मागे परतावे लागेल. वरीलप्रमाणे केलेले छोटे छोटे मार्ग आकृती ४.६ मध्ये लाल रंगात दाखविले आहेत. हे छोटे छोटे मार्ग आपण आपल्या पसंतीनुसार

आकृती ४.६

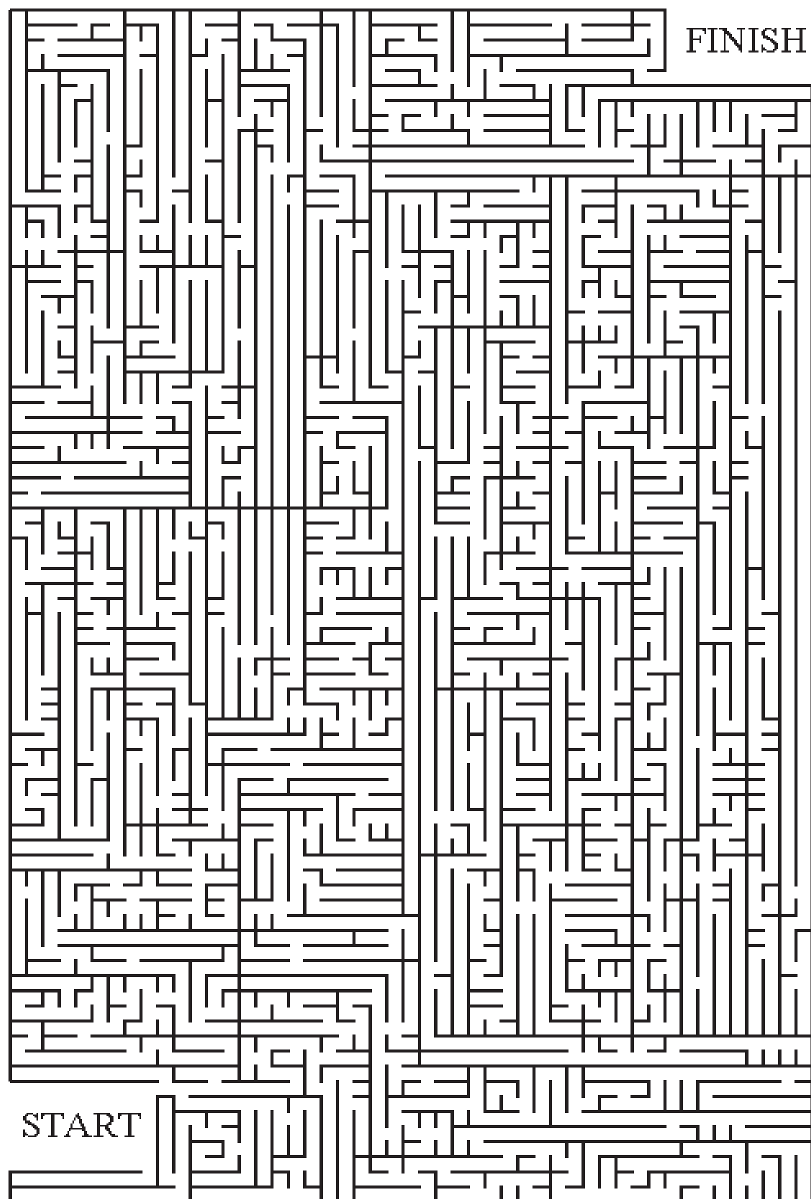
आकृती ४.७

तयार करू शकाल.

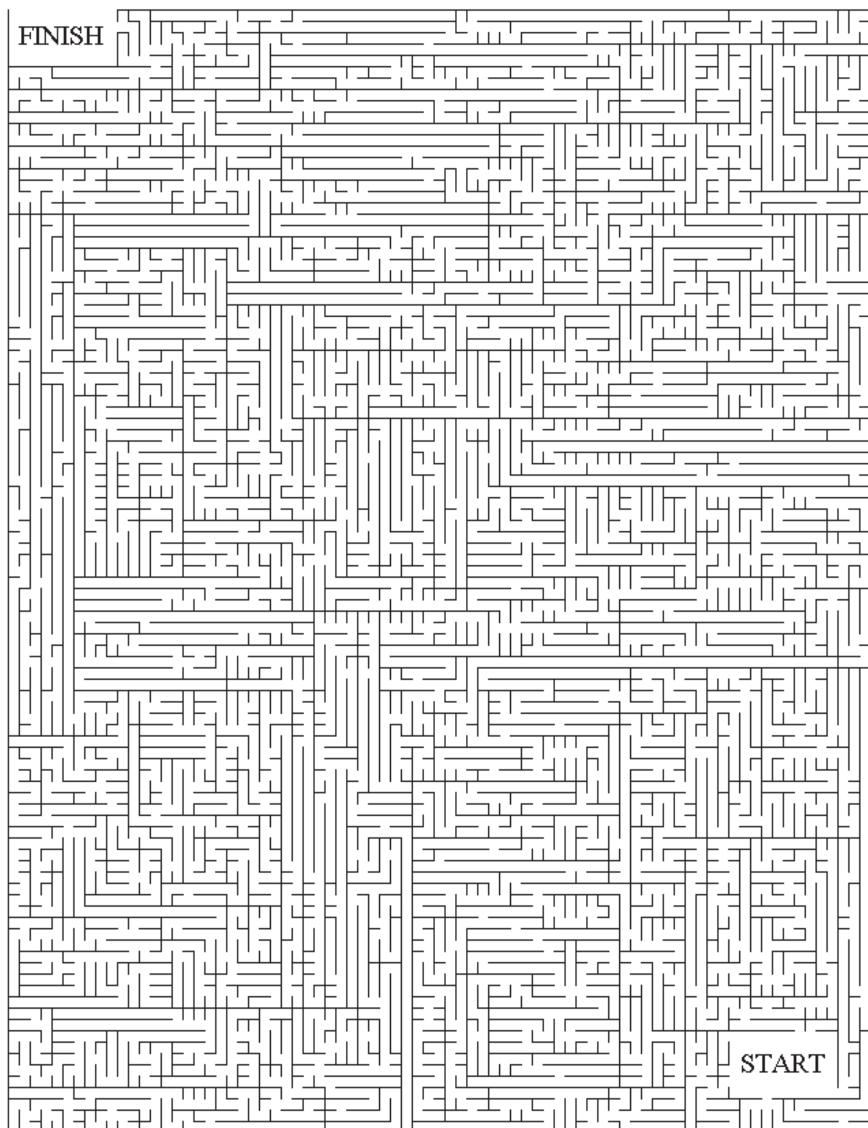
५) उरलेल्या छोट्या चौरसांमधील तिरक्या रेषा आता पुसून टाका व ते चौरस काळ्या रंगाने रंगवा म्हणजे ते चौरस आता भिंतीचा एक भाग बनतील. पूर्ण तयार झालेले चक्रव्यूह कोडे आकृती ४.७ मध्ये दाखविले आहे.

सोडविण्यात कठीण अशी चक्रव्यूह कोडी आकृती ४.८ व ४.९ मध्ये दाखविली आहेत. ती सोडविण्याचा प्रयत्न करून बघा. आकृती ४.१० व ४.११ मध्ये दाखविलेले कोडे आकाराने फार मोठे आहे. ते दोन भागांत आहे. आकृती ४.१० मध्ये त्या कोड्याचा उजवा भाग व आकृती ४.११ मध्ये डावा भाग दाखविला आहे. हे भाग छापून घेऊन सामायिक कडेवर चिकटवून घ्या आणि सोडविण्याचा प्रयत्न करून बघा. (प्रस्तुत चक्रव्यूह कोडी Puzzle Solutions Company च्या bitboost.com या संकेतस्थळावरून घेतलेली आहेत.)

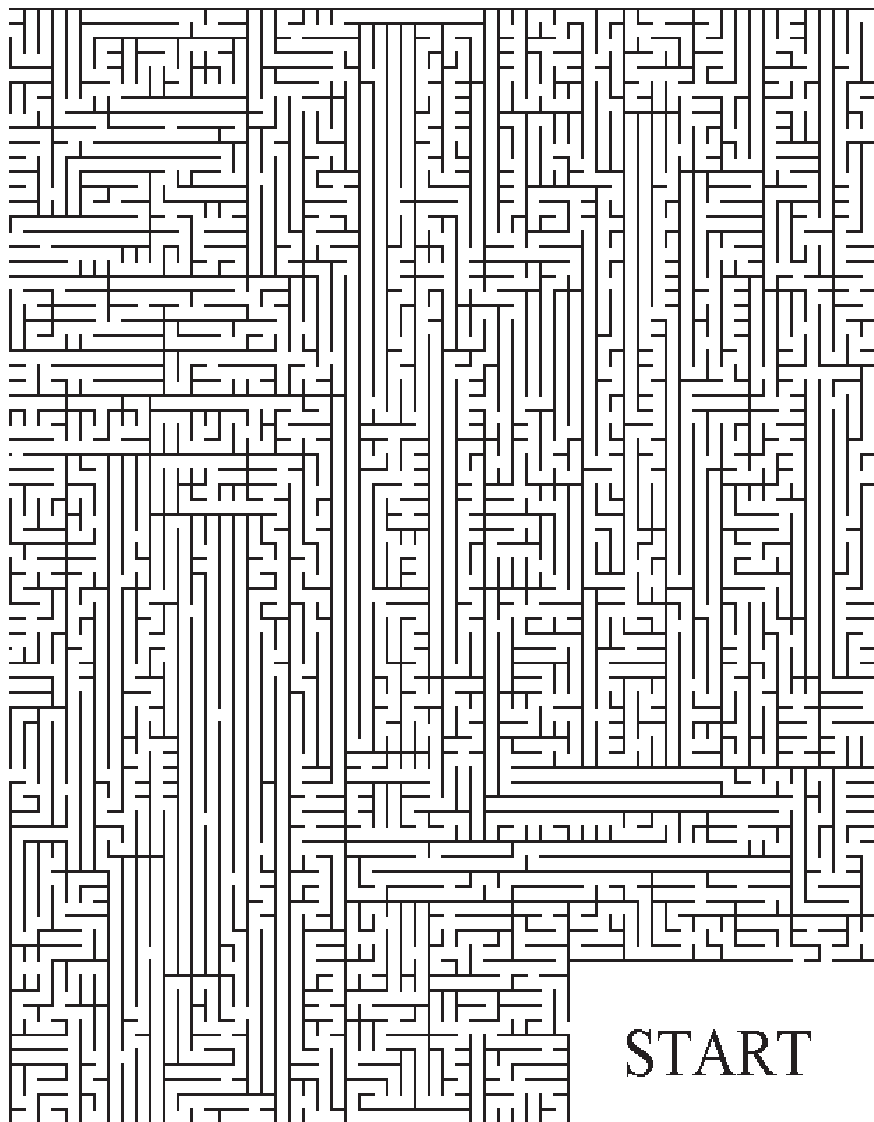
चक्रव्यूहाच्या वरील कोड्यांची उत्तरे दिलेली नाहीत.



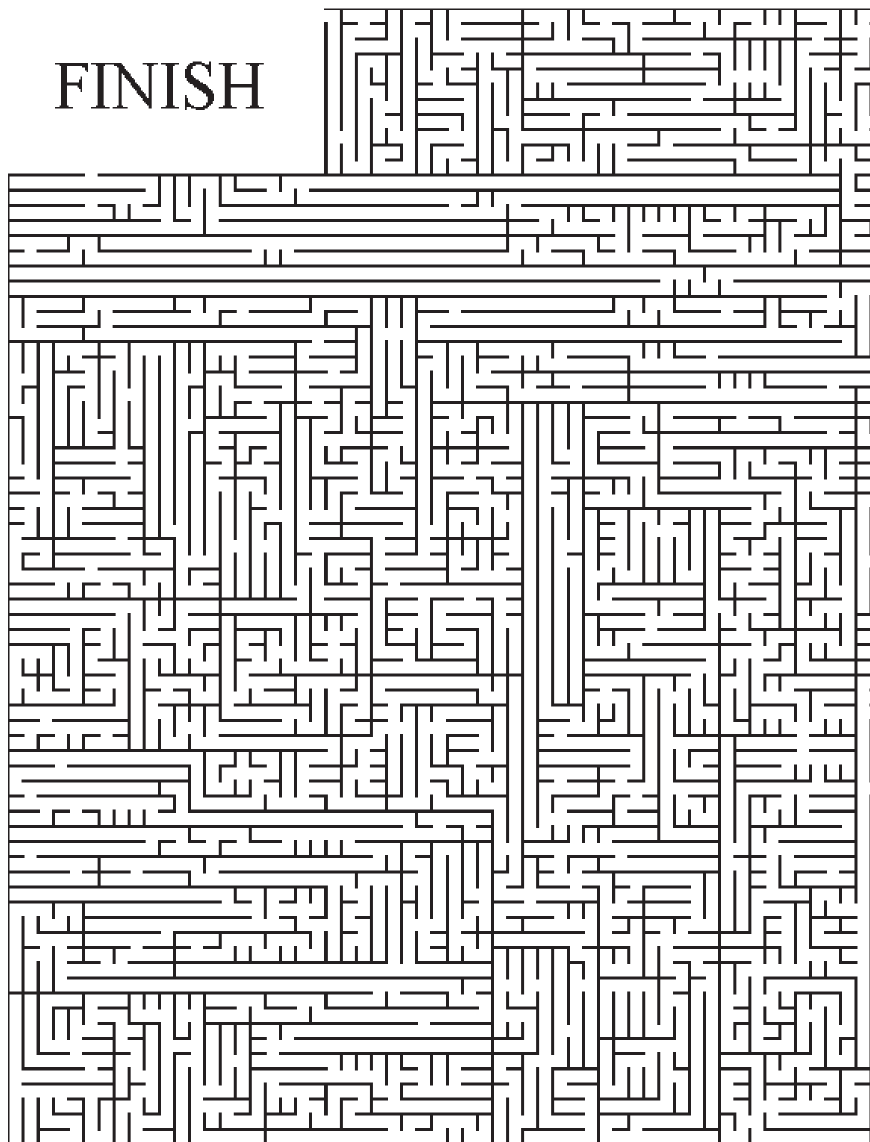
आकृती ४.८



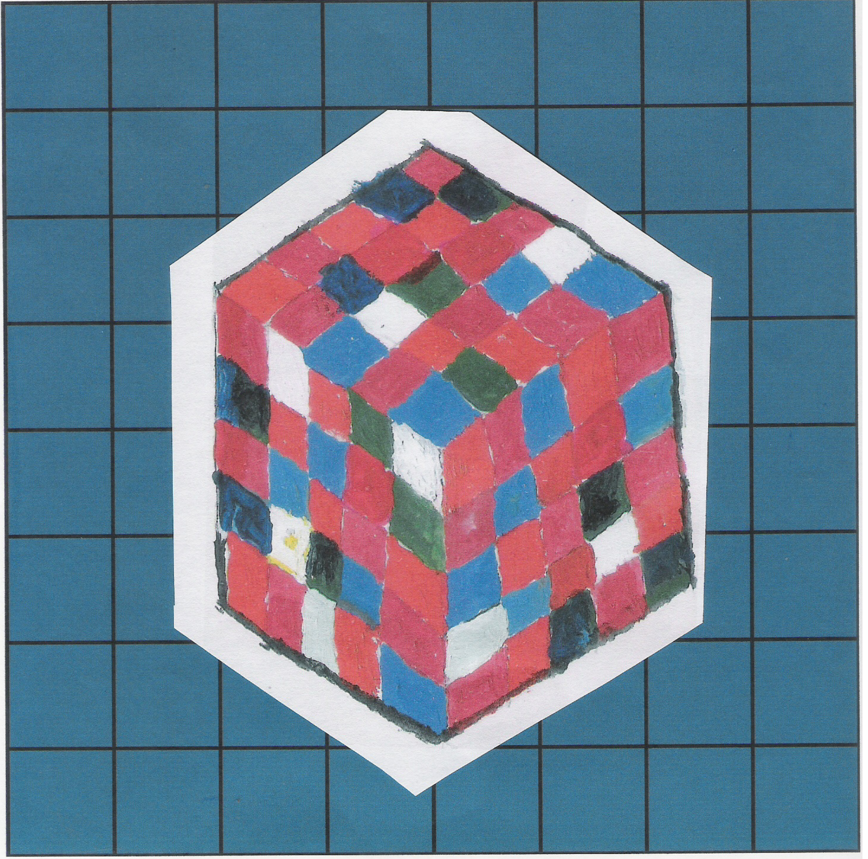
आकृती ४.९



आकृती ४.१०



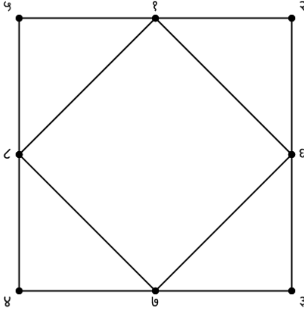
आकृती ४.११



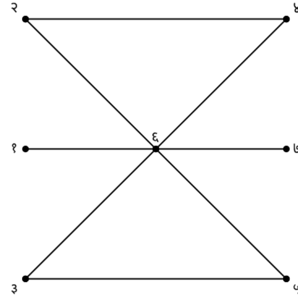
अमूर्त चित्र ४

प्रकरण ५
हा माझा मार्ग एकला

या प्रकरणात आपण काही रेषाकृतींचा विचार करूया की ज्या अनेक बिंदू व त्या बिंदूंना जोडणाऱ्या बिंदूमार्गांनी तयार होतात. उदाहरणार्थ, आकृती ५.१ ही आठ बिंदूंनी व या बिंदूंना जोडणाऱ्या १२ बिंदूमार्गांनी बनलेली आहे. या आकृतीच्या एका बिंदूपासून सुरुवात



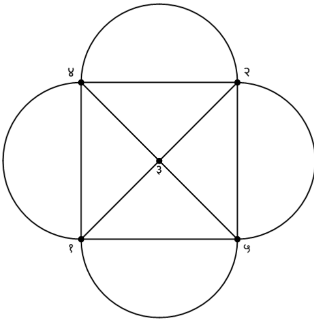
आकृती ५.१



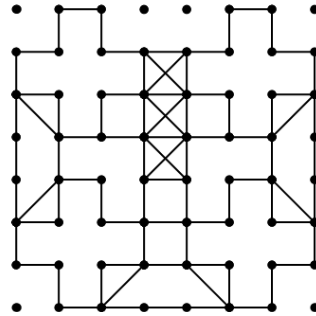
आकृती ५.२

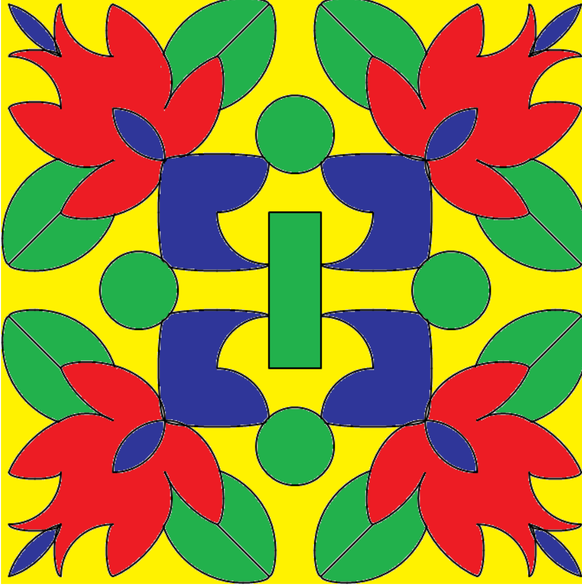
करून वेगवेगळ्या बिंदूमार्गावरून जाऊन पेन्सिलने ही आकृती आपल्याला गिरवावयाची आहे. यात अटी अशा आहेत :

१) सर्व बिंदूमार्ग हे एकदाच गिरविता येतात म्हणजे एकदा एका बिंदूमार्गावरून आपण आपल्या पसंतीच्या दिशेने गिरविल्यास त्या बिंदूमार्गावरून आपण त्याच दिशेने किंवा परत



आकृती ५.३


आकृती ५.४


आकृती ५.५

उलट दिशेने गिरविण्याची परवानगी नाही.

२) गिरवीत असताना एखाद्या बिंदूला परत परत भेट देण्याची परवानगी आहे.

३) गिरविण्यास सुरुवात केल्यानंतर संपूर्ण आकृती गिरविल्याशिवाय पेन्सिल वर उचलावयाची परवानगी नाही.

१७ व्या शतकात होऊन गेलेल्या ऑयलर (Euler) नावाच्या गणितज्ज्ञाने याबाबतचा अभ्यास प्रथम केला.

आकृती ५.२ आणि ५.३ या छोट्या आकृत्या आहेत. वरील अटी पाळून त्या आपल्याला पेन्सिलीने गिरवता येतात का ते पाहा. त्यानंतर आकृती ५.४ मध्ये दाखविलेली रांगोळीची आकृती गिरवून पाहा.

आता आपला मोर्चा आकृती ५.५ मध्ये दाखविलेल्या रांगोळीकडे वळवूया. या रांगोळीच्या चारी बाजूच्या कडा आपण गिरवायच्या नाहीत. वरील अटी पाळून ही आकृती पूर्ण गिरविणे शक्य नाही; परंतु जर जास्तीचे बिंदूमार्ग तयार केले तर ते शक्य होईल. आपण खालीलप्रमाणे जास्तीचे बिंदूमार्ग रेषा रेखाटून तयार करूया म्हणजे आकृती ५.६ तयार होईल.

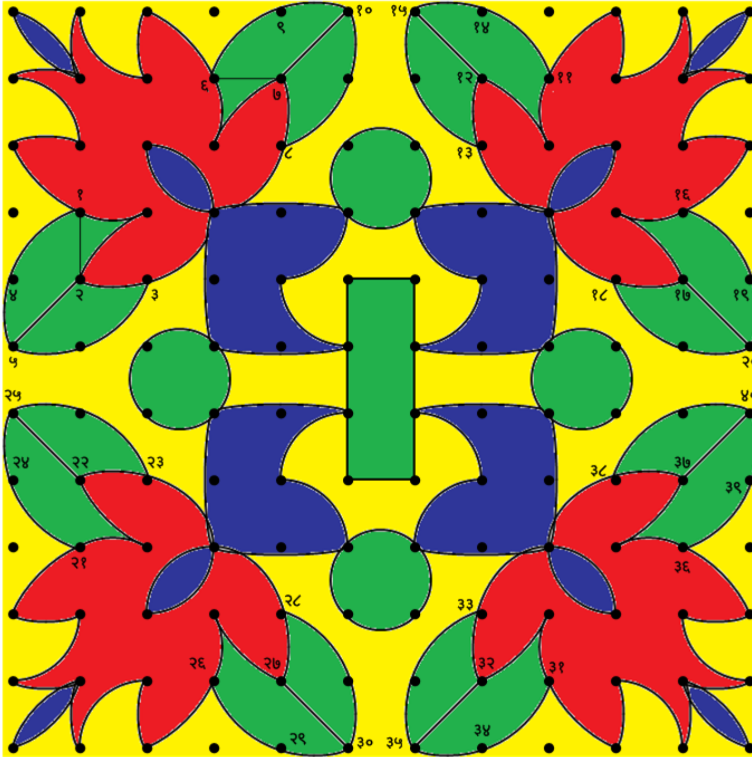
बिंदूपासून	बिंदूपर्यंत
१	२
६	७
११	१२
१६	१७

२१	२२
२६	२७
३१	३२
३६	३७

यापैकी काही बिंदूमार्ग १–२, ६–७ हे रेखाटून दाखविले आहेत. बाकीचे याचप्रमाणे तयार करा.

इतके जास्तीचे बिंदूमार्ग रेखाटूनसुद्धा ही रांगोळीची आकृती आपल्याला संपूर्ण गिरविता येणे शक्य नाही. आणखी आठ बिंदूमार्ग आपल्याला या १ ते ४० बिंदू–समूहांमधील काही बिंदूंमध्ये रेखाटावे लागतील. मग ही आकृती आपल्याला संपूर्ण गिरविता येईल.

कोणते हे आठ बिंदूमार्ग ते सांगा व आकृती संपूर्ण गिरवून दाखवा.



आकृती ५.६



अमूर्त चित्र ५

प्रकरण ६
ही जादूभरी चौरसाची नवलनगरी

प्राचीन काळापासून जादूचे चौरस प्रसिद्ध आहेत. या चौरसांमध्ये सर्व आडव्या ओळींमधील व उभ्या स्तंभांमधील अंकांची बेरीज सारखीच असते. त्याचप्रमाणे दोन्ही कर्णांवरील अंकांची बेरीज पण तेवढीच असते. या जादूच्या गुणधर्मामुळे अशा चौरसांच्या तसबिरी देवघरांमध्ये ठेवून त्या पूजल्या जात असत. अजूनही ही चाल काही घरांमध्ये आढळते. मध्य प्रदेशामधील खजुराहो येथील पुरातन मंदिरे त्यांच्या शिल्पकलेकरिता प्रसिद्ध आहेत. त्यातील पार्श्वनाथ मंदिरात ४×४ घरांचा जादूचा चौरस आपल्याला बघावयास मिळतो. आकृती ६.१ मध्ये हा चौरस दाखविला आहे. त्यातील आडव्या ओळीतील, उभ्या स्तंभातील व दोन्ही कर्णांवरील अंकांची बेरीज ३४ येते.

७	१२	१	१४
२	१३	८	११
१६	३	१०	५
९	६	१५	४

आकृती ६.१



आकृती ६.२



आकृती ६.३

आकृती ६.२ मध्ये एक पितळेचे यंत्र दाखविले आहे. त्यातील चौरस ३३ या बेरजेचा



आकृती ६.५



आकृती ६.४

आहे. आकृती ६.३ मधील यंत्रात ही बेरीज १५ आहे. अशी यंत्रे आपल्याला काही घरांतून आढळतात.

आकृती ६.४ मध्ये एक अंगठी दाखविली आहे. या जादूच्या चौरसात बेरीज ३४ आहे.

आकृती ६.५ मध्ये सोळाव्या शतकातील Albreight Durer नावाच्या प्रसिद्ध चित्रकाराचे Melancholio हे चित्र दाखविले आहे. त्यात वरच्या उजवीकडील कोपऱ्यात ३४ बेरीज असलेला जादूचा चौरस आहे.

जादूचे चौरस तयार करण्याच्या विविध पद्धती आहेत. काही मूलभूत पद्धतीचे सविस्तर विवरण 'Mathematical Recreations and Essays' या Rouse Ball यांच्या पुस्तकात, त्याचप्रमाणे Magic Squares and Cubes या W.S. Andrews यांच्या पुस्तकात आले आहे. जादूच्या चौरसावर त्यानंतरही बरेच संशोधन होऊन ते तयार करण्याच्या नवनवीन पद्धती शोधण्यात आल्या आहेत; परंतु चाळीस–पन्नास वर्षांपूर्वी प्रसिद्ध असलेली एका संस्कृत श्लोकामध्ये दिलेली पद्धती येथे देण्याचा मोह आम्हांला आवरत नाही. श्लोक असा आहे –

वाञ्छा कृतार्धम् कृतमेकहीनम्।
द्वेके ग्रहे षोडष सप्त चाष्टे।।
तिथ्यावतारे प्रथमेच कोष्टे।
द्वि सप्त षट् त्र्यष्ट भू वेद बाणाः।।

या श्लोकाप्रमाणे ३४ बेरीज असलेला जादूचा चौरस तयार करण्याकरिता प्रथम आकृती ६.६ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ४×४ चा रिकामा चौरस तयार करूया. आता श्लोकाचा पहिला चरण पाहूया. जर तुम्हांला ३४ बेरीज असणारा चौरस करण्याची इच्छा असेल. (वाञ्छाः – इच्छा) तर बेरजेला दोनाने भागून (कृतार्धम्) त्यातून १ वजा करा. (कृतमेकहीनम्) असे हा चरण

आकृती ६.६

सांगतो. म्हणजे आपल्याला (३४/२) −१=१६ हा अंक मिळेल.

दुसऱ्या व तिसऱ्या चरणांत १६ पासून सुरुवात करून उलट क्रमाने ९ पर्यंतचे अंक चौरसाच्या कोणत्या घरात भरावयाचे त्याचे वर्णन केले आहे. त्या घरांचा क्रम खालीलप्रमाणे आहे.

द्वेके – दुसरे घर
ग्रहे – नववे घर (नऊ ग्रह)
षोडष – सोळावे घर
सप्त – सातवे घर
चाष्टे – आठवे घर
तिथ्या (तिथी) – पंधरावे घर (पंधरा तिथी)
(अ)वतारे – दहावे घर (दहा अवतार)
प्रथमेच – पहिले घर

घरांचा वरील क्रम डाव्या बाजूच्या वरच्या कोपऱ्यात १ ने सुरू होऊन डावीकडून उजवीकडे व वरून खाली याप्रमाणे तळाच्या उजव्या कोपऱ्यात १६ ने संपतो.

९	१६		
		१३	१२
१५	१०		
		११	१४

आकृती ६.७

अशा रीतीने १६ ते ९ हे अंक उलट क्रमाने श्लोकाच्या दुसऱ्या व तिसऱ्या चरणांत सांगितल्याप्रमाणे चौरसाच्या वेगवेगळ्या घरांमध्ये भरावे. चौरस आता आकृती ६.७ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे दिसेल.

उरलेल्या रिकाम्या घरात कोणते अंक भरावयाचे ते श्लोकाच्या चौथ्या चरणांत सांगितले आहे.

द्वि – २
सप्त – ७
षट् – ६
त्र्य (त्रि) – ३
(अ)ष्ट – ८
भू – १ (१ भूमि)
वेद – ४ (४ वेद)

बाण – ५ (पंच बाण)

वरील अंक चौरसाच्या वरच्या ओळीपासून सुरुवात करून डावीकडून उजवीकडे सर्वात खालच्या ओळीपर्यंत रिकाम्या घरात क्रमाक्रमाने भरावयाचे आहेत. या रीतीने तयार केलेला जादूचा चौरस आकृती ६.८ मध्ये दाखविला आहे.

९	१६	२	७
६	३	१३	१२
१५	१०	८	१
४	५	११	१४

आकृती ६.८

वरील चौरसात आडव्या ओळी, उभे स्तंभ व दोन्ही कर्ण यांतील अंकांची बेरीज ३४ येते. यातील प्रत्येक २ × २ चौरसांतील ४ अंकांची बेरीज ३४ येते. त्याचप्रमाणे या चौरसाची वरची ओळ आपण खाली तळाशी जोडली व त्याचप्रमाणे वरच्या ओळी क्रमाक्रमाने तळाशी जोडल्या तर होणाऱ्या सर्व चौरसांत ३४ बेरीजच मिळते.

या प्रकारे आपण उभे स्तंभ डावीकडून उजव्या कडेवर क्रमाक्रमाने जोडत गेलो तरी ही बेरीज ३४ राहते. अशा रीतीने हा जादूचा चौरस सर्वगुणसंपन्न असतो.

जादूचे चौरस तयार करण्याच्या आणखी काही पद्धती आता पाहूया.

प्रत्येक बाजूवर घरांची संख्या विषम असेल तर असे चौरस करण्याची एक सर्वसमान पद्धती खाली दिली आहे. त्याकरिता चौरसाच्या प्रत्येक घराला आपल्याला एक २ अंकांचा क्रमांक द्यावा लागेल. आकृती ६.९ मध्ये एका ५ × ५ चा चौरस दाखविला आहे. सर्वात खालच्या ओळीत डाव्या कोपऱ्यात असणाऱ्या घराचा क्रमांक (१,१) असा असेल

१,५	२,५	३,५	४,५	५,५
१,४	२,४	३,४	४,४	५,४
१,३	२,३	३,३	४,३	५,३
१,२	२,२	३,२	४,२	५,२
१,१	२,१	३,१	४,१	५,१

आकृती ६.९

व प्रत्येक घर खालून कोणत्या ओळीत व डावीकडून कोणत्या स्तंभात आहे त्याप्रमाणे त्याचा क्रमांक असेल. म्हणजे क्रमांकामधील पहिला अंक ते घर खालून कितव्या ओळीत आहे ते दाखवील. त्याचप्रमाणे क्रमांकामधील दुसरा अंक ते घर डावीकडून कितव्या स्तंभात आहे ते दाखवील. आकृती ६.९ च्या चौरसात हे क्रमांक दाखविले आहेत.

जर आपल्याला न × न ही विषम घरे प्रत्येक बाजूवर असणारा जादूचा चौरस तयार करावयाचा असेल तर खालील पायऱ्यांमधून जावे लागेल.

अ) १ पासून $न^२$ हे अंक आपल्याला वापरावे लागतील. (जर न = ५ असेल तर १ ते २५ अंक वापरावयास लागतील.)

ब) बेरीज न/२ ($न^२$ + १) एवढी होईल. (प्रत्येक ओळीत, स्तंभांत व कर्णांवर)

(जर न = ५ असेल तर बेरीज ६५ येईल.)

क) आता घर क्रमांक ((न – १)/२, न – १) मध्ये १ हा अंक लिहा. (जर न = ५ असेल तर घर क्रमांक (२,४) मध्ये १ हा अंक लिहा.

ड) यापुढे खालीलप्रमाणे २, ३, ४ ..... $न^२$ हे अंक वेगवेगळ्या घरांत भरा.

इ) (न – १)/२, न – १) या क्रमांकाच्या घरात आपण १ ने सुरुवात केली होती.

वरील क्रमांकाच्या दोन्ही अंकांत प्रत्येकी १ मिळवून नवीन क्रमांक मिळवा व त्या घरात २ लिहा. (जर न = ५ असेल तर (२, ४) या क्रमांकांच्या दोन्ही अंकांत १ मिळविल्यानंतर आपल्याला (२ + १, ४ + १) म्हणजे (३, ५) हा नवीन क्रमांक मिळेल. या क्रमांकाच्या घरात २ लिहा.)

ई) अशा रीतीने प्रत्येक वेळी चालू क्रमांकाच्या दोन्ही अंकात प्रत्येकी १ मिळवून नवीन क्रमांक मिळवा व क्रमाक्रमाने त्या घरांत ३ ते $न^२$ अंक लिहा.

फ) असे करीत असताना दोन गोष्टी लक्षात ठेवावयाच्या आहेत. पहिली गोष्ट म्हणजे एखाद्या क्रमांकाच्या दोन्ही अंकात प्रत्येकी १ मिळविताना तो किंवा ते अंक 'न' पेक्षा मोठे झाल्यास त्या मोठ्या झालेल्या अंकातून / अंकांतून 'न' वजा करावा व सुधारित घर क्रमांक मिळवावा. (जर न = ५ असेल तर (३, ५) या घरात आपण २ लिहिला आहे. या पुढचा घर क्रमांक आपल्याला (३ + १, ५ + १) म्हणजे (४, ६) असा मिळतो. त्यातील ६ हा अंक ५ या अंकापेक्षा मोठा आहे म्हणून सुधारित घर क्रमांक (४, ६–५) = (४, १) असा मिळवावा व त्या घरात ३ हा अंक लिहावा.)

ह) दुसरी लक्षात ठेवावयाची गोष्ट म्हणजे न + १, २न + १, ३न + १, ४न + १....

१८	२५	२	९	११
२४	१	८	१५	१७
५	७	१४	१६	२३
६	१३	२०	२२	४
१२	१९	२१	३	१०

आकृती ६.१०

वगैरे अंक वेगवेगळ्या घरांत भरताना वरीलप्रमाणे घर क्रमांक तयार करून चालणार नाही. त्यांच्या बाबतीत घर क्रमांक तयार करताना अगोदरच्या घर क्रमांकाच्या दुसऱ्या अंकांतून १ वजा करावा. पहिला अंक बदलू नये. (जर न = ५ असेल तर हे अपवादात्मक अंक ६, ११, १६, २१ असे असतील. ५ हा अंक (१,३) या घरात भरून झाल्यानंतर ६ हा अंक (१, ३–१) = (१, २) या घरात भरावा.)

वरीलप्रमाणे तयार केलेला ६५ बेरीज असणारा ५ × ५ चा जादूचा चौरस आकृती ६.१० मध्ये दाखविला आहे. वरील पद्धती सर्व समान असून 'न'च्या कोणत्याही विषम किमतीकरिता ती लागू आहे.

जादूचे चौरस तयार करण्याची दुसरी पद्धती आता पाहूया. आपल्याकडे जर न × न चा जादूचा चौरस असेल तर न^{२} × न^{२} आकाराचा जादूचा चौरस या पद्धतीने आपण तयार करू शकतो. उदाहरणार्थ ३ × ३ आकाराचा १ ते ९ अंक वापरून केलेला व १५ बेरीज असणारा प्रसिद्ध जादूचा चौरस घेऊया. आकृती ६.११ मध्ये हा चौरस दाखविला आहे. वरील चौरसाचा उपयोग करून आपण ३^{२} × ३^{२} म्हणजे ९ × ९ चा जादूचा चौरस तयार करू शकतो. त्यात १ ते ८१ अंक वापरले जातील. आकृती ६.१२ मध्ये ९ × ९ चा चौरस दाखविला आहे. या चौरसात ३ × ३ आकाराचे ९ छोटे चौरस बसतात. त्यांना १ ते ९ अंक दिलेले आहेत. आकृती ६.१२ आणि आकृती ६.११ मधील या अंकांच्या स्थानांचा सारखेपणा आपल्या लक्षात येईल. या ३ × ३ च्या चौरसांना दिलेले १ ते ९ अंक प्रत्यक्ष ९ × ९ च्या चौरसावर लिहू नयेत, पण त्यांचे स्थान लक्षात ठेवावे.

२	९	४
७	५	३
६	१	८

आकृती ६.११

हे स्थान लक्षात ठेवण्याकरिता आकृती ६.११ मध्ये दाखविलेला चौरस उपयोगी पडू शकतो.

आकृती ६.१२ मध्ये आता आपल्याला अंक भरणे आहे. त्याकरिता १ क्रमांकाच्या ३ × ३ चौरसामध्ये आकृती ६.११ मधील १ ते ९ अंक भरून केलेला चौरस भरावा. २ क्रमांकाच्या ३ × ३ चौरसामध्ये आपल्याला १० ते १८ अंक भरावे लागणार आहेत. त्याकरिता आकृती ६.११मधील प्रत्येक अंकात ९ मिळवून येणारा ३ × ३ चा चौरस वरील २ क्रमांकाच्या ३ × ३ चौरसात भरावा. अशा रीतीने प्रत्येक वेळी आकृती ६.११ च्या अंकात ९ मिळवून येणारा चौरस आकृती ६.१२ च्या ३, ४, ५, ६, ७, ८ आणि ९ क्रमांकाच्या ३ × ३ चौरसांच्या जागी भरावा. अशा रीतीने आकृती ६.१२ मध्ये सर्वच्या सर्व ३ × ३ आकाराचे ९ चौरस भरले जातील व आपल्याला ९ × ९ आकाराचा ३६९ बेरीज असलेला आकृती ६.१३ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे जादूचा चौरस मिळेल.

	२			९			४	
	७			५			३	
	६			१			८	

आकृती ६.१२

११	१८	१३	७४	८१	७६	२९	३६	३१
१६	१४	१२	७९	७७	७५	३४	३२	३०
१५	१०	१७	७८	७३	८०	३३	२८	३५
५६	६३	५८	३८	४५	४०	२०	२७	२२
६१	५९	५७	४३	४१	३९	२५	२३	२१
६०	५५	६२	४२	३७	४४	२४	१९	२६
४७	५४	४९	२	९	४	६५	७२	६७
५२	५०	४८	७	५	३	७०	६८	६६
५१	४६	५३	६	१	८	६९	६४	७१

आकृती ६.१३

आता खालील कोडी सोडविण्याचा प्रयत्न करून पाहा.

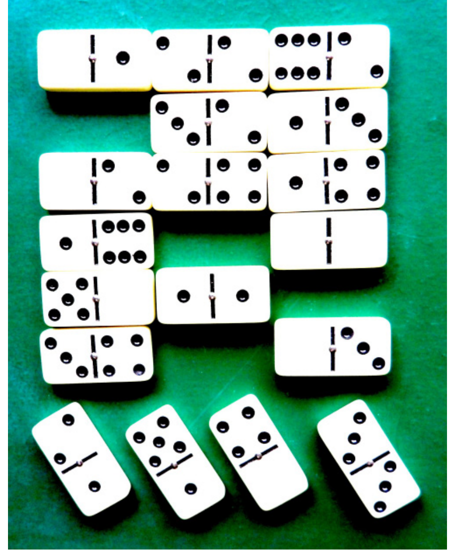
१) ७ × ७ आकाराच्या आकृती ६.१४ मध्ये दाखविलेल्या चौरसामध्ये काही घरे रिकामी आहेत. १ ते ४९ अंक वापरून हा चौरस तयार करावयाचा आहे व सर्व ओळीत, स्तंभात व कर्णावर असलेल्या अंकांची बेरीज १७५ आली पाहिजे. रिकाम्या जागांत कोणते अंक असावयाला पाहिजेत ते आपण सांगू शकाल का?

२) डोमिनोचा सेट वापरून आकृती ६.१५ मध्ये दाखविलेला ६ × ६ चौरस

२६	२१		४		३६	३१
४४	३९		२२		१२	७
२०	८		४७		३०	२५
३८	३३		१६		६	४३
१४	२		४१		२४	१९
३२	२७		१०		४९	३७
१	४५		३५		१८	१३

आकृती ६.१४

तयार केला आहे. या चौरसात काही जागा रिकाम्याच ठेवल्या आहेत. चौरसाच्या बाजूला ठेवलेले डोमिनो वापरून ते या रिकाम्या जागांवर ठेवून आपण हा जादूचा चौरस पूर्ण करून दाखवायचा आहे. चौरसाच्या आडव्या ओळीत, उभ्या स्तंभावर व कर्णावर असलेल्या ठिपक्यांच्या संख्येची बेरीज सारखी आली पाहिजे. ही बेरीज किती येईल ? पाहा प्रयत्न करून.

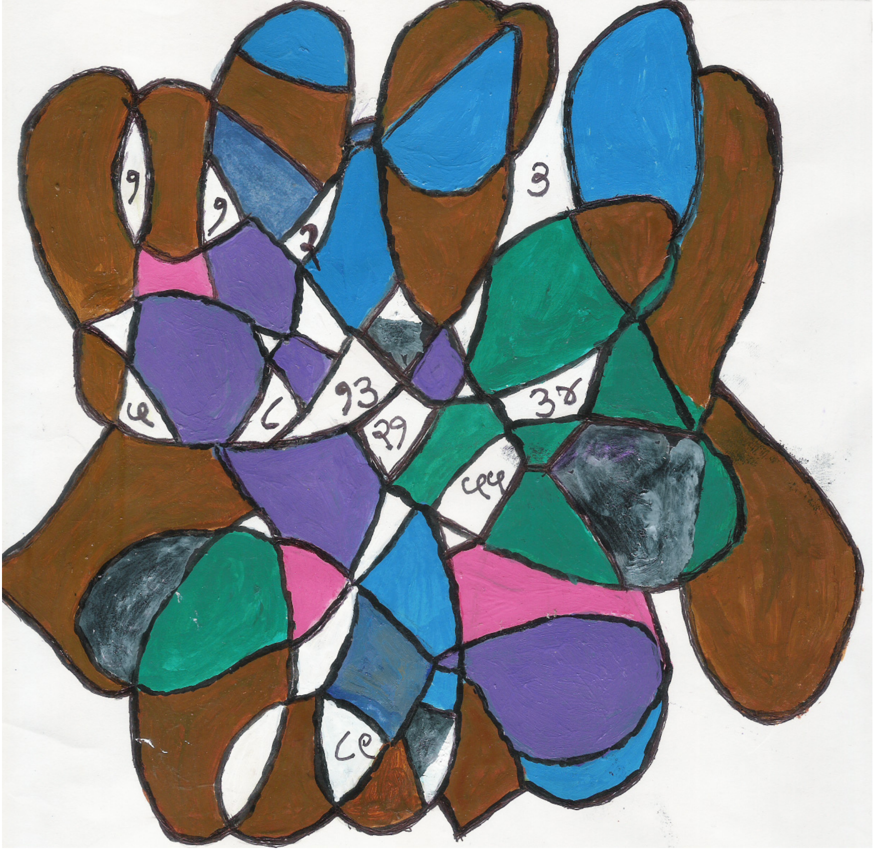


आकृती ६.१५

३) आकृती ६.१६ मध्ये ५ × ५ चा एक चौरस दिला आहे. त्यातील काही घरे रिकामी सोडली आहेत. चौरसात १ ते २५ असे सर्व अंक आले पाहिजेत. सर्व घरांमध्ये असे अंक आले पाहिजेत की आडव्या ओळीत, उभ्या स्तंभात आणि कर्णावर असलेल्या अंकांची बेरीज सर्वत्र निरनिराळी आली पाहिजे. ५ ओळी, ५ स्तंभ व २ कर्ण यावरील अंकांच्या १२ बेरजा ६० ते ७१ अशा क्रमाक्रमाने आल्या पाहिजेत. मोकळ्या सोडलेल्या घरात कोणते अंक भराल ?

५		२०		२२
१९		१३		२
२१		३		२५
११		७		१
१२		१७		१६

आकृती ६.१६

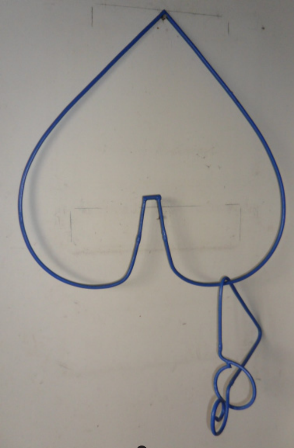


अमूर्त चित्र ६

प्रकरण ७
विलग करा यांना/ करा यांचे मीलन

या प्रकरणातील कोडी गणिताच्या Topology या शाखेशी संबंधित आहेत. लोखंडी तारेपासून किंवा दोरी, मणी वा इतर गोष्टी वापरून तयार केलेली ही कोडी फार प्रचलित आहेत. तारेपासून केलेली कोडी अजूनही बऱ्याच वेळा मुंबईत जहांगीर आर्ट गॅलरीच्या बाहेरच्या फूटपाथवर विकत मिळतात. या तारेच्या कोड्यांमध्ये बहुतेक वेळा यातले तारेचे आकार विलग करणे किंवा त्यातील तारेचे वळे बाहेर काढणे किंवा दोन वळ्यांच्या जागांची अदलाबदल करून दाखविणे असे कौशल्य दाखवावे लागते. या विषयावरील एक फार सुंदर पुस्तक म्हणजे 'Compendium of Over 1050 Wire Puzzles' हे होय. हे पुस्तक Richard I. Hess यांनी लिहिले आहे. कोड्यांवरील इतर बऱ्याच पुस्तकात या प्रकारची कोडी आपल्याला आढळतात, पण इतक्या मोठ्या प्रमाणावर या कोड्यांच्या आकृत्या असणारे वरील पुस्तक म्हणजे एक मेजवानीच आहे. इंग्लिशमध्ये अशा कोड्यांना Disengagement Puzzles असे म्हटले जाते.

आकृती ७.१ आणि ७.२ मध्ये आमच्या संग्रहातले एक कोडे दाखविले आहे. तारेने बनविलेली कोडी साधारणतः लहान आकाराची असतात. मात्र हे कोडे ६ मि.मी. व्यासाची



आकृती ७.१



आकृती ७.२



आकृती ७.३



आकृती ७.४



आकृती ७.५

लोखंडी शीग वाकवून व वेल्डिंग करून साधारणत: ४५ सें.मी. लांबीचे बनविलेले आहे. गंजू नये म्हणून त्यावर पावडर कोटिंग केले आहे. हे कोडे सोडविणे म्हणजे एकात एक अडकविलेले त्याचे दोन भाग विलग करणे. आपण हे कोडे तारेपासून तयार करू शकता. हे कोडे सोडविणे तसे फारच सोपे आहे. आपण प्रयत्न करून बघा.

आकृती ७.३ ते ७.५ मध्ये तारेच्या कोड्यांवर आधारलेली कर्णभूषणे आपल्याला दिसतील.

१) आग्र्याहून सुटका

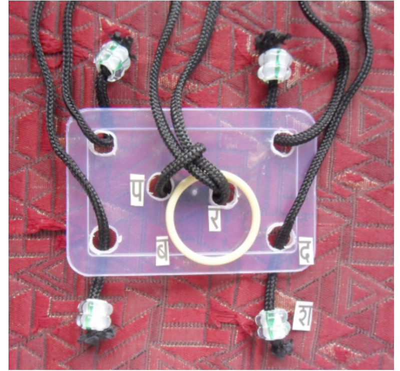
आकृती ७.६ आणि ७.७ एक कोडे दाखविले आहे. हे कोडे आपण घरी बनवून सोडवू शकता. दोरांच्या तुरुंगात जखडलेल्या बांगडीची यात आपल्याला सुटका करावयाची आहे. शिवाजी महाराजांच्या आग्र्याहून झालेल्या सुटकेची यात आठवण येते म्हणून या कोड्याला वरील नाव दिले आहे. पातळ प्लास्टिकच्या १२.५ सें.मी. × १० सें.मी. मापाचा आयताकार कापून घ्यावा. (लवचीक प्लास्टिक कात्री वापरून कापणे शक्य आहे) याच्या चारी कोपऱ्यात १ सें.मी. व्यासाची छिद्रे 'द' येथे दाखविल्याप्रमाणे पाडावीत. दाभण किंवा टोच्या वापरून त्याचे टोक शेगडीवर तापवून घेऊन तो प्लास्टिकमधून आरपार घालून ही छिद्रे पाडणे सोपे



आकृती ७.६

जाईल. अशीच दोन छिद्रे 'प' आणि 'र' या जागी पाडावीत. भोवरा फिरविताना जी दोरी वापरली जाते तशा प्रकारची दोरी किंवा नाडी घेऊन तिचे प्रत्येकी २० सें.मी. लांबीचे चार तुकडे घ्यावे व ते 'न' येथे एकत्र बांधावे. दोरीच्या या चारी तुकड्यांची दुसरी टोके कोपऱ्यातील चारी छिद्रांमधून ओवून घेऊन पुढे आणखी चार मण्यांमधून 'श' येथे दाखविल्याप्रमाणे ओवून घ्यावीत.

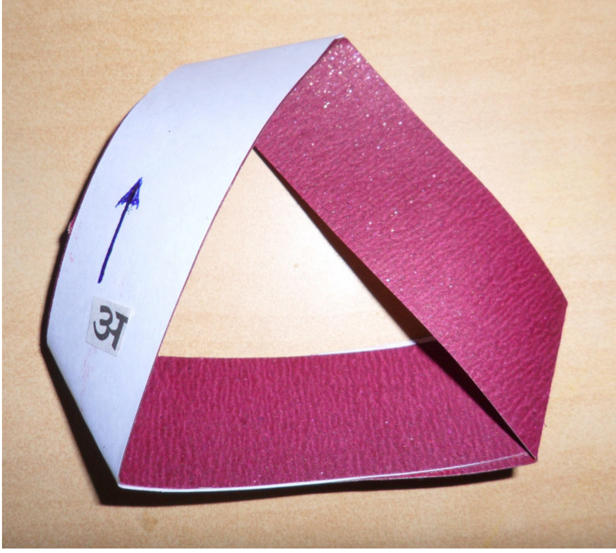
मण्यांमधून बाहेर येऊ नयेत म्हणून या चारी दोऱ्यांच्या टोकाला गाठी माराव्यात. मण्यांचा आकार एवढा असावा की, मणी प्लास्टिकमध्ये असलेल्या छिद्रातून वर येऊ नयेत. त्यानंतर ५० सें.मी. लांबीचा दोरीचा तुकडा घेऊन तो दुहेरी करावा. आकृती क्र. ७.६ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे तो 'प' आणि 'र' या छिद्रातून ओवून घेऊन त्यात 'ब' येथे दाखविल्याप्रमाणे बांगडी अडकवून त्याची दोन टोके 'न' येथे बांधावीत. हे कोडे आता तयार झाले. या दोऱ्यांमधून बांगडीची सुटका कशी करावयाची ते पाहा.



आकृती ७.७

२) **मोबियसचे वलय क्रमांक १**

मोबियस (Mobius) या गणितज्ज्ञाच्या नावाने आकृती ७.८ मधील वलय ओळखले जाते. कागदाची एक पट्टी घेऊन तिचे एक टोक १८० अंशातून वळवून घेऊन दोन्ही टोके एकमेकाला चिकटवून टाकावीत म्हणजे हे वलय तयार होईल. या वलयाच्या मध्यावर असलेल्या 'अ' या बिंदूपासून सुरुवात करून कात्रीने एका दिशेने मध्य रेषेवर कापत जाऊन 'अ' बिंदूपाशी परत आल्यास आपल्या अपेक्षेप्रमाणे या वलयाची दोन स्वतंत्र वलये होत नाहीत, तर यातून एक मोठे वलय निर्माण होते. आता यातील कोड्याचा भाग असा आहे की,



आकृती ७.८

अशा तऱ्हेने तयार झालेल्या मोठ्या वलयाच्या कडा परत एकमेकाला चिटकवून आपल्याला मूळचे लहान आकाराचे वलय परत मिळविता येते का ? पाहा प्रयत्न करून.

३) मोबियसचे वलय क्रमांक २

हे कोडे आणखी कठीण आहे. वरील कोड्यात वलय तयार करताना आपण कागदाच्या पट्टीचे टोक १८० अंशामधून फिरविले होते. जर ३६० अंशामधून हे टोक वळवून आणि पट्टीची टोके चिकटवून वलय तयार केले व वरीलप्रमाणे ते मध्यरेषेवर कापले तर एकात एक अडकलेली दोन वलये निर्माण होतात. आता या दोन वलयाच्या कडा एकमेकांना चिकटवून मूळचे वलय निर्माण करणे तितकेसे सोपे नाही. प्रयत्न करून पाहा.



अमूर्त चित्र ७

प्रकरण ८
खेळ खेळूया दोघे आपण

दोघा जणांनी खेळावयाचे व गणितावर आधारलेले खेळ छानपैकी मनोरंजन करू शकतात. अशा कित्येक खेळांचे विश्लेषण करून निश्चित जिंकण्याच्या मार्गपद्धती तयार करण्यात आल्या आहेत. कोड्यांच्या काही पुस्तकात या मार्गपद्धती दिलेल्या आहेत. यातला अगदी साधा व दोघांनी खेळावयाचा खेळ खालीलप्रमाणे आहे. ५० मणी घेऊन हा खेळ सुरू होतो. प्रत्येकाने आळीपाळीने हा खेळावयाचा आहे. ज्याची पाळी असेल त्याने १, २, ३, ४, ५ किंवा ६ मणी घ्यावयाचे. अशा तऱ्हेने आळीपाळीने खेळून सर्व मणी संपवावयाचे आहेत. ज्याला शेवटची खेळावयाची पाळी मिळेल तो जिंकला असे समजवायचे आहे.

हा खेळ खेळताना ज्याची खेळाची पहिली पाळी असेल तो एका विशिष्ट मार्गपद्धतीने हा खेळ जिंकू शकतो. त्याकरिता त्याने पहिल्या पाळीच्या वेळी १ मणी घ्यावा. त्याच्या प्रतिस्पर्ध्याची पुढची पाळी झाल्यानंतर दोघांना मिळून तोपर्यंत जितके मणी घेतले असतील ती संख्या पाहावी व इतके मणी पुढच्या पाळीत घ्यावे की या पाळीनंतर दोघांनी मिळून घेतलेल्या मण्यांची संख्या ८ होईल. म्हणजे पहिल्या पाळीत आपण १ मणी घेतल्यानंतर जर प्रतिस्पर्ध्याने त्याच्या पाळीत ४ मणी घेतले तर दोघांनी मिळून तोपर्यंत घेतलेल्या मण्यांची संख्या १ + ४ = ५ होईल. आपण पुढच्या पाळीत ३ मणी घ्यावेत म्हणजे वर सांगितल्याप्रमाणे आपल्या पाळीनंतर दोघांनी मिळून घेतलेल्या मण्यांची संख्या ८ होईल.

अशा रीतीने आपल्या प्रत्येक पाळीच्या वेळी मणी घेताना इतके मणी घ्यावेत की, आपल्या पाळीनंतर दोघांनी मिळून घेतलेल्या मण्यांची संख्या १५, २२, २९, ३६, ४३, ५० होईल. म्हणजे शेवटची खेळावयाची पाळी मिळून आपल्याला खेळ जिंकता येईल. वरील अंकांच्या रांगेत आपल्या पहिल्या दोन खेळांसंबंधीचे अंक जोडल्यास ही अंकांची रांग १, ८, १५, २२, २९, ३६, ४३, ५० अशी दिसते. यामध्ये कोणत्याही दोन जवळ जवळ असणाऱ्या अंकांत ७ चा फरक आहे. प्रतिस्पर्ध्याच्या लक्षात हे यावयास वेळ लागणार नाही व त्याने पहिली खेळी केल्यास जिंकण्याची मार्गपद्धती तोसुद्धा वापरू शकेल. या खेळातील गंमत नंतर निघून जाण्याची शक्यता आहे. मात्र प्रतिस्पर्ध्याच्या ध्यानात ही मार्गपद्धती लक्षात आली नाही तर त्याला प्रथम खेळण्याची संधी देऊन सुद्धा आपल्याला

वरील अंकांच्या साखळीचा ताबा मिळवता येईल व एकदा हा ताबा मिळवला की शेवटपर्यंत न सोडता शेवटची खेळी खेळावयास मिळून खेळ जिंकता येईल.

१) विषमे विजयी भव

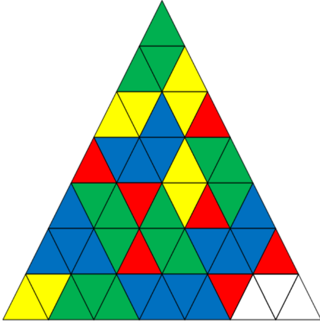
हा खेळ ३३ मण्यांनी सुरू होतो व दोघांजणात आळीपाळीने खेळला जातो. प्रत्येकाच्या पाळीच्या वेळी त्याने १, २, ३, ४ किंवा ५ मणी घ्यावयाचे. आळीपाळीने खेळून हे मणी संपविल्यानंतर प्रत्येकाने आपण घेतलेले सर्व मणी मोजावयाचे आहेत. ज्याने जमा केलेल्या मण्यांची संख्या विषम भरेल तो या खेळात जिंकला असे समजावयाचे आहे.

या खेळात ज्याची खेळण्याची पहिली पाळी असेल तो एका विशिष्ट मार्गपद्धतीचा उपयोग करून निश्चित जिंकू शकतो. ही मार्गपद्धती या प्रकरणाच्या सुरुवातीला दिलेल्या खेळाएवढी सरळसोट नाही. त्यामुळे या खेळातली गंमत बऱ्याच वेळा खेळल्यानंतरसुद्धा कमी होत नाही. ज्याला खेळण्याची पहिली पाळी मिळेल त्याने समजा २ मणी घेतले तर त्याने कोणत्या मार्गपद्धतीचा अवलंब केला तर तो खेळात निश्चित जिंकू शकेल ते सांगू शकाल काय ?

प्रकरण ९
कोड्यांची माळ इथे

१) आजीची रंगीत गोधडी

१) नलिनीच्या शाळेला मे महिन्याची सुट्टी होती. कर्जतला नलिनीचे आजोबा आणि आजी राहत असत. सुट्टीत नलिनी त्या दोघांना भेटावयास गेली. नलिनीच्या आजीला रंगीबेरंगी कपड्यांच्या तुकड्यांमधून गोधड्या तयार करण्याचा छंद होता. अशा गोधड्या मग नलिनीची आजी तिच्या छोट्या नातवंडांमध्ये वाटून टाकत असे.



आकृती ९.१

यावेळी नलिनी आजीला भेटली तेव्हा ती अशाच प्रकारे एक गोधडी तयार करीत होती. मात्र गोधडीचा आकार यावेळी नेहमीप्रमाणे चौरस वा आयताकृती नव्हता. नलिनीला गोधडीची रंगसंगतीसुद्धा जरा विचित्रच वाटली. गोधडी त्रिकोणाकृती होती व छोट्या छोट्या रंगीत त्रिकोणी कापडाच्या ठिगळांतून तयार केली होती. गोधडी जवळजवळ सर्व तयार झाली होती.

आकृती ९.१ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ती दिसत होती. फक्त तळाजवळील एक कोपरा तयार करावयाचा बाकी होता. तो आकृतीत सफेद रंगात दाखविला आहे.

''आजी, या कोपऱ्यात कोणत्या रंगाचे त्रिकोण असणार ?'' नलिनीने आजीला विचारले.

''अगं तिथे एकच रंग येणार.'' आजी उत्तरली.

''कोणता ते तू सांग बघू ?''

तुम्ही नलिनीला मदत करू शकाल काय ?

२) कोंबड्या विक्रीतील जादू

चेतनचा कोंबड्या पाळण्याचा धंदा आहे. त्याच्या फार्मवर आठ आयताकृती खुराडी असून प्रत्येक खुराडे दोन खणांनी मिळून बनलेले आहे. आकृती ९.२ मध्ये हे खुराडे दाखविलेले असून प्रत्येक खुराड्याच्या खणांमधील कोंबड्यांची संख्या

१	१०	१४	५
१३	६	२	९
१५	११	८	४
३	७	१२	१६

आकृती ९.२

पण या आकृतीत दाखविली आहे. चेतनला आताच टेलिफोनवरून ३४ कोंबड्यांची मागणी आली आहे; परंतु त्याला तर काही जरुरीच्या कामाकरिता लगेच बाहेर जावयाचे आहे. कोंबड्यांची निगा राखण्याकरिता गडी माणसे आहेत. त्यातील एक सोडून बाकीची सर्व माणसे आज एका जत्रेला निघून गेली आहेत. या गड्याचे गणित कच्चे आहे. त्याला तर कोंबड्यांची संख्या मोजता पण येत नाही.

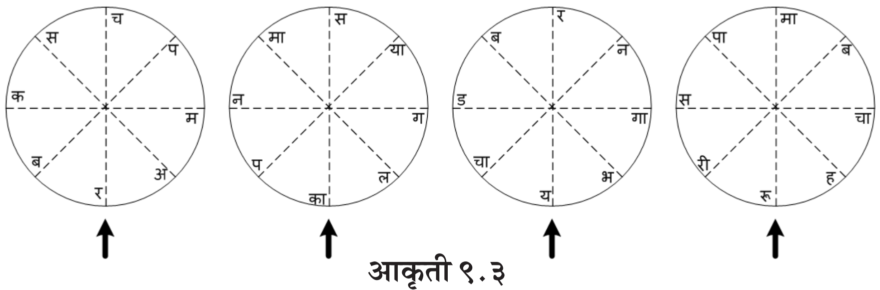
चेतन जाण्याच्या आधी एक गोष्ट करतो. कोठल्याच खणांमधील कोंबड्या न हलविता आयताकृती खुराड्यांची तो अशी फेररचना करतो की, प्रत्येक आडव्या ओळीतील उभ्या स्तंभातील व दोन्ही कर्णांवर असलेल्या खुराड्यांच्या खणातील कोंबड्यांची संख्या ३४ भरते.

बाहेर जाताना तो गड्याला सांगतो, ''गिऱ्हाईकाला ३४ कोंबड्या देताना आता तुला मोजण्याची जरुरी नाही. कोणत्याही एका आडव्या ओळीतल्या किंवा उभ्या ओळीतल्या किंवा तिरक्या कर्णांवरील खणांतील सर्व कोंबड्या गिऱ्हाईकाला दे.''

चेतनने आयताकृती खुराड्याची फेररचना खणामधील कोंबड्यांच्या संख्येत बदल न करता कशी केली असेल ?

३) उघड दार देवा

मेवालाल शेटजींच्या घरची तिजोरी उघडण्याकरिता सांकेतिक शब्द वापरावा लागत होता. आकृती ९.३ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे त्यात चार चक्रे होती. ही चक्रे फिरवून त्यावरील अक्षरे बाणाच्या समोर आणून चार अक्षरी सांकेतिक शब्द तयार करावा लागत असे. म्हणजे तिजोरी उघडणे शक्य होई. शेटजींनी हा शब्द ध्यानात ठेवला होता. त्यांनी तो शब्द त्यांच्या शेटाणीला पण सांगितला होता, पण बहुतेक वेळा तिजोरी उघडण्याचे काम शेटच करत



आकृती ९.३

असत. तिच्यावर ही वेळ कधीच येत नसे. त्यामुळे ती तो शब्द विसरून गेली होती.

पण एकदा शेट कामाकरिता परगावी गेले होते व तिजोरी उघडण्याची तिच्यावर वेळ आली. तिला तो सांकेतिक शब्द काही केल्या आठवेना. शेटजींना विचारावे तर एका बैठकीत ग्रस्त असल्याने त्यांनी मोबाईल बंद करून ठेवला होता. शेटाणीचे दुपारचे जेवण चालू होते. जेवणात पुलाव, चमचमीत भाज्या, श्रीखंड, रायते वगैरे चांगले चांगले पदार्थ असतानासुद्धा त्यांचे लक्ष त्यात नव्हते. जेवता जेवताना ताटात बघताना त्यांना एकदम तो सांकेतिक शब्द आठवला.

कोणता बरे तो शब्द ?

४) पंचेचाळीस रुपयांच्या बक्षिसाची गोष्ट

छोट्या दिनेशला त्याचे बाबा बेरीज कशी करावयाची ते शिकवत होते. शिकवून झाल्यानंतर त्यांनी वहीत एक ३ × ३ चा चौरस आकृती ९.४ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे काढला. नंतर त्यांनी या चौरसाच्या उजव्या बाजूला आणि खालच्या बाजूला काही संख्या लिहिल्या. त्याचप्रमाणे सर्वात वरच्या ओळीच्या उजव्या कोपऱ्यावर आणि सर्वात खालच्या ओळीच्या उजव्या कोपऱ्याच्या खाली अशा दोन संख्या लिहिल्या.

			१७
			१२
			१०
			२३
१२	१५	१८	९

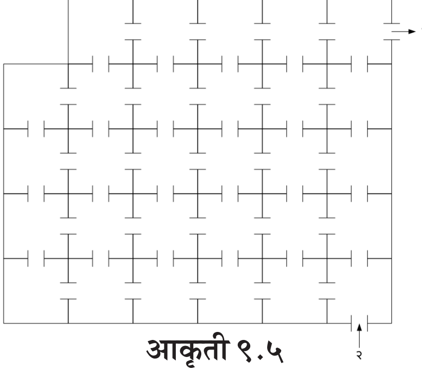
आकृती ९.४

त्यानंतर त्यांनी आपल्याजवळची प्रत्येकी एका रुपयाची चार नाणी, प्रत्येकी दोन रुपयांची आठ नाणी व प्रत्येकी पाच रुपयांची पाच नाणी दिनेशला दिली व म्हणाले, ''आता रिकाम्या घरात ही नाणी अशी ठेवून दाखव की चारी आडव्या ओळीतील, चारी उभ्या ओळीतील व चारी कर्णांवरील असलेल्या घरातील रुपयांची बेरीज मी आकृतीच्या बाजूला दाखविलेल्या संख्यांएवढी होईल. उदाहरणार्थ, दुसऱ्या आडव्या ओळीतील रुपयांची बेरीज १० रुपये झाली पाहिजे. त्याचप्रमाणे दोन्ही कर्णांवरील रुपयांची बेरीज अनुक्रमे ९ आणि १७ रुपये झाली पाहिजे. जर या बेरजा तुला जमल्या तर हे सर्व ४५ रुपये तुला बक्षीस.''

दिनेशला हे बक्षीस जिंकण्याकरिता तुम्ही मदत कराल काय ?

५) चावरे खेकडे

रमेशची, आकृती ९.५ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे २९ डबक्यांची खेकड्यांची शेती



आकृती ९.५

पनवेलजवळच्या गावात आहे. ही डबकी एकमेकांना लागून असून एका डबक्यामधून दुसऱ्या डबक्यात जाण्याकरिता मधल्या बांधांमध्ये पुरेशी फट आहे. डबक्यात शिरण्याकरिता '२' व बाहेर येण्याकरिता '१' येथे वाटा आहेत. रमेशचा नोकर जनू त्या डबक्यांची निगा राखण्याचे काम करीत होता. जनू तसा थोडासा अर्धवटच होता.

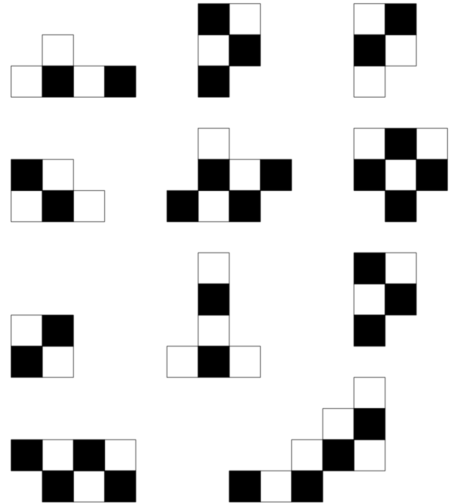
रमेश जनूला म्हणाला, ''जनू जा पाहू डबक्यात आणि प्रत्येक डबक्यातून एक असे २९ खेकडे मला आणून दाखव. पाहूया कितपत वाढले आहेत ते ?''

''हो, मात्र एक लक्षात ठेव, एकदा एका डबक्यात जाऊन एक खेडका पकडलास तर परत त्या डबक्यात जायचे नाही. कारण खेकडे सावध होतील आणि तुला चावतील.'' रमेश जनूला चेष्टेने बोलला.

जनूने मात्र रमेशचे हे बोलणे फार गंभीररीत्या घेतले. '२' येथे प्रवेश करून प्रत्येक डबक्याला एकदाच भेट देऊन २९ खेकडे घेऊन '१' येथून जनू कसा बाहेर पडला असेल ते तुम्ही सांगू शकाल काय ?

६) बुद्धीचे बळ

मुकेश बुद्धिबळ खेळण्यात पटाईत होता. शाळेत त्याच्या वर्गमित्रांना तो या खेळात नेहमी हरवीत असे. त्यामुळे त्याला थोडी 'ग'ची बाधा झाली होती. त्याच्या आईला हे ठाऊक होते. माणसाने एवढे गर्विष्ठ असू नये असे तिला कायमचे वाटावयाचे व तसे ती त्याला नेहमीच बोलून दाखवीत असे. मुकेश मात्र तिकडे फारसे लक्ष देत नसे.


आकृती ९.६

एकदा रागारागाने मुकेशच्या आईने त्याच्या बुद्धिबळाच्या पटाचे कात्रीने कापून तुकडे तुकडे केले. आकृती ९.६ मध्ये ते दाखविले आहेत. ''तू बुद्धिबळाच्या खेळामध्ये एवढा पटाईत आहेस ना? तुझे बुद्धीचे बळ किती आहे ते पाहूया. जोड पाहू हे तुकडे आणि पट पहिल्यासारखा करून दाखव.'' ती ओरडून म्हणाली.

मुकेशने बरेच प्रयत्न करूनदेखील त्याला ते जमेना. तुम्ही त्याला मदत करणार काय?

७) Well, Well, किती लांब वेल?

आमच्या गल्लीत दरवर्षी गणेशोत्सव साजरा केला जातो. यावेळच्या गणेशोत्सवात दहा खांबांचे एक मोठे मखर तयार करावयाचे ठरले. आकृती ९.७ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे प्रत्येक खांब ४०सें.मी. व्यासाचा असून त्याची उंची २५० सें.मी. आहे. खांबांच्या भोवती गुंडाळण्याकरिता तार वाकवून तिला मखमलीची फुले जोडून वेल तयार करावयाची आहे. ही वेल प्रत्येक खांबावर बिंदू १ पासून निघून खांबाला दोन वेळा पूर्ण वेटोळी मारून बिंदू ३ पाशी येऊन संपते.

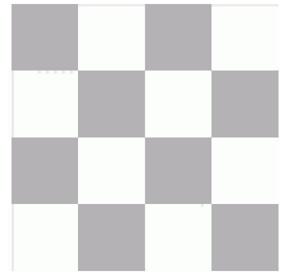
आकृती ९.७

गल्लीतल्या महिला मंडळाने हे वेल तयार करण्याचे काम मोठ्या हौसेने करावयाची तयारी दर्शविली.

''पण बाजारातून तार आणावी लागेल. ती किती लांबीची आणू?'' एका महिलेने मंडळाच्या सचिवाला विचारले. सचिव डोके खाजवायला लागला. तुम्ही सांगू शकाल काय तारेची लांबी?

८) मोटारींची रंगसंगती

एका मोटारीच्या कंपनीने नवीन मोटार बाजारात आणली आहे. पाच प्रकारच्या रंगांत ही मोटार उपलब्ध आहे. ते रंग आहेत – लाल, पिवळा, हिरवा, गुलाबी व निळा. जाहिरात करण्याकरिता या मोटारी मैदानामध्ये आकृती ९.८ मध्ये दाखविलेल्या ४ × ४ चौरसाच्या १६ घरांमध्ये उभ्या करून छायाचित्र काढावयाचे आहे. या छायाचित्रात पाचही रंगांच्या मोटारी वापरून एक विशिष्ट रंगसंगती साधावयाची आहे. मोटारी अशा रीतीने चौरसाच्या घरांमध्ये उभ्या करावयाच्या आहेत की, कोणत्याही आडव्या ओळीत, उभ्या ओळीत व दोन्ही कर्णांवर असलेल्या प्रत्येकी चार



आकृती ९.८

घरांमध्ये कोणताही एक रंग फक्त एकदाच येईल.

छायाचित्रकार बुचकळ्यात पडला आहे. त्याला मदत करणार काय ?

९) Humpty Dumpty चे गणित

नेहमीप्रमाणे दीना मांजरी तिच्या सफेद पिलाला आपल्या पंजाने साफ करीत होती. तिच्या काळ्या पिल्लाचे मात्र भलतेच उपद्व्याप चालले होते. ॲलिस आरामखुर्चीत अर्धवट झोपेत लवंडली होती. काळे पिल्लू रेशमदोरीच्या गुंड्याशी खेळत होते. गुंडा त्याने पार उलगडून टाकला होता. अर्धवट झोपेत ॲलिसला हम्प्टी डम्प्टीची आठवण येत होती. त्याला तिने कागदावर ३६५ – १ = ३६४ असा हिशेब मांडून दाखविला होता, ते तिला आठवत होते.

‘‘साधा हिशेब समजावयाला एवढा वेळ लागतो तर खरेच थोडा कठीण हिशेब करावयाला त्याला किती वेळ लागेल ? त्याच्या बथ्थड डोक्यात तो हिशेब शिरेल काय ?’’ ॲलिस अर्धवट झोपेत पुटपुटली.

	९	६	६	६
	६	९	६	६
१	६	६	३	२

आकृती ९.९

शेवटी, काळ्या पिल्लाच्या म्याव म्यावने ती जागी झाली.

‘‘काय म्हणत होते मी, थोडं कठीण कोडं ? हे कोडं कसं काय आहे.’’ ॲलिस म्हणाली व तिने एक बेरीज लिहून काढली. (आकृती ९.९)

‘‘मला नाही वाटत हम्प्टी डम्प्टीला ही बेरीज पटेल. त्याला कळेल अशी बेरीज परत लिहून काढावी लागेल.’’ ॲलिस पुटपुटली.

९	६	६	६
६	९	६	६
४	४	३	३

आकृती ९.१०

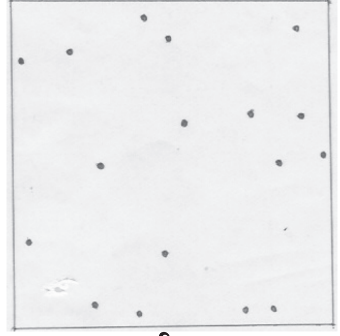
दीना मांजरीनेसुद्धा म्याव म्याव आवाज करीत ॲलिसला अनुमोदन दिले.

ॲलिसने बेरीज परत लिहून काढली. (आकृती ९.१०)

हम्प्टी डम्प्टीला वरील बेरीज पटेल ?

१०) मला चेरी पाहिजे

आज अनिलचा वाढदिवस आहे. त्याच्या १७ मित्रमैत्रिणी त्यानिमित्त जमल्या आहेत. वाढदिवसाचा केक आकृती ९.११ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे चौरस आकाराचा आहे. त्यावर सतरा चेरीज लावल्या आहेत व त्यांना बघून सर्वांच्या तोंडाला पाणी सुटले आहे. (आकृतीत चेरीज ठिपक्यांनी दाखविल्या आहेत.) प्रत्येकाला चेरी हवी आहे. केक कापताना अनिलला काळजी घ्यायची आहे. केकच्या कापलेल्या प्रत्येक तुकड्यात एक चेरी आली पाहिजे.



आकृती ९.११

अनिलने सहा सरळ रेषांत केक अशा रीतीने कापला की प्रत्येक तुकड्यात एक चेरी येईल. अर्थातच तुकडे लहानमोठे झाले, पण केकपेक्षा चेरीचे आकर्षण जास्त असल्याने कोणी तक्रार केली नाही.

४	९	१२	८	१०	४	७	९	१०	६	५	४
१३	१	२	३	१२	९	१०	११	१	२	३	११
५	८	६	५	१४	७	८	७	९	८	४	१
१	१२	७	४	३	१	११	५	१०	३	२	५
८	४	५	११	१२	१३	१२	३	११	१४	१२	१०
९	१५	११	७	८	२	३	१	१२	४	९	११
१०	१३	१२	३	४	५	१२	४	८	१२	३	१
७	५	४	८	१	९	१३	९	१०	७	६	५
१२	८	१	१५	८	११	६	७	८	१०	९	८
२	३	७	१०	३	७	५	११	१३	७	४	१०
१०	११	११	२	५	९	४	१०	१२	६	१४	७
१२	१	४	८	१०	१३	३	२	१	५	११	६

आकृती ९.१२

जे अनिलला जमले ते तुम्हांला जमेल का? बघा प्रयत्न करून.

११) आंबे बासष्ठी

अरुण गावाबाहेरच्या आमराईला भेट देण्याकरिता आलेला आहे. अरुण तसा मोठा श्रीमंत आहे. जमीनजुमला, घरे, गायी–म्हशींची खिल्लारे बाळगून आहे. ही सर्व श्रीमंती त्याला कष्टाने वाढवून शेतकीमधील पदवीपर्यंत शिक्षण देणाऱ्या त्याच्या वडिलांमुळे म्हणजे श्रीपतरावांमुळे आहे. अरुणला त्याची जाणीव आहे.

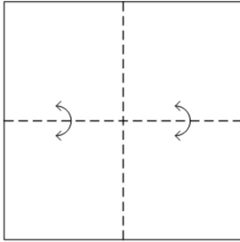
त्याच्या वडिलांचा वाढदिवस याच महिन्यात आहे आणि त्यानिमित्त त्याला वडिलांना आमराईचा एक तुकडा वाढदिवसाची भेट म्हणून खरेदी करावयाचा आहे. आकृती ९.१२ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे आमराई चौरस आकाराची असून तिचे १२ × १२ = १४४ छोट्या चौरस तुकड्यांमध्ये विभाजन केले आहे. प्रत्येक छोट्या चौरसात असलेल्या आंब्यांची झाडांची संख्या आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आहे. अरुणला या आमराईत ३ × ३ चा म्हणजे ९ छोटे चौरस राहतील असा चौरस तुकडा खरेदी करावयाचा आहे.

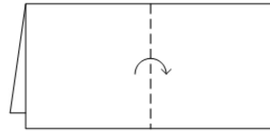
श्रीपतरावांना ६२ वर्षे पुरी होणार आहेत. अनिलच्या मनात श्रीपतरावांना आमराईचा असा चौरस तुकडा द्यावयाचा आहे की, ज्यावरील ९ छोट्या चौरसातील आंब्यांच्या झाडांची संख्या ६२ भरेल.

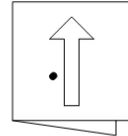
हा ३ × ३ चा चौरस तुकडा शोधावयास तुम्ही मदत करणार का ?

१२) बाणेदार स्वयंसेवक

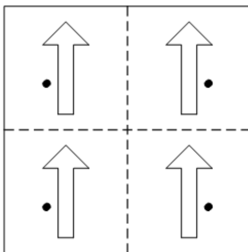
शहरात भरणाऱ्या एका मोठ्या जत्रेला फार मोठी गर्दी होते. या गर्दीत ट्रॅफिकचे नियोजन

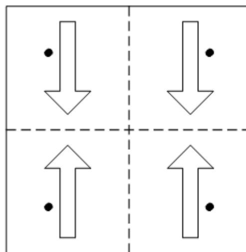

(१)

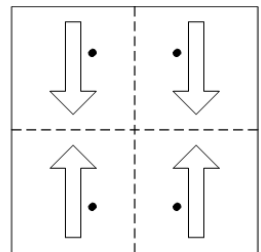

(२)


(३)

आकृती ९.१३


(१)


(२)


(३)

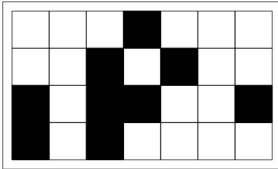
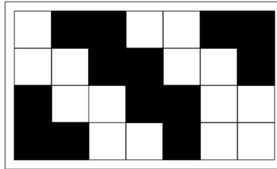
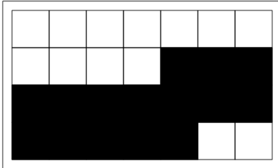
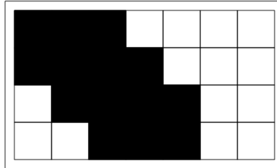
आकृती ९.१४

करणे म्हणजे पोलीस दलाला एक फार मोठे आव्हान असते. मग त्याकरिता सेवाभावी संस्था आणि शाळा यांची मदत स्वयंसेवकांच्या रूपात घेतली जाते. या स्वयंसेवकांचे निराळेपण त्यांच्याकरिता जे बिल्ले तयार केलेले असतात यावर ठरते. यावर्षी या बिल्ल्यांवर बाणांच्या आकृतीची रचना करावयाचे ठरले. यावरून एक कोडे सुचले, त्याकरिता खालील कृती करा.

आकृती ९.१३ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एक ८ सें.मी. × ८ सें.मी. आकाराचा चौरस सफेद कागदाचा तुकडा घेऊन त्याच्या पाठीमागे, त्याच आकाराचा चौरस कार्बन पेपर कार्बनची बाजू कागदाला लागेल असा ठेवा. आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे आता दोन घड्या घाला. पेन्सिलीने आकृतीत दाखविल्याप्रमाणे एक बाण व ठिपका घडी केलेल्या चौरसावर काढा. पाठी कार्बन पेपर असल्या कारणाने बाण व ठिपका कागदाच्या मागच्या बाजूवर चार ठिकाणी उमटेल. चौरस कागदाची मागील बाजू आकृती ९.१४ मध्ये तीन प्रकारच्या शक्यता लक्षात घेऊन दाखविली आहे. यातली कोणती शक्यता खरी आहे ?

१३) एका खिडकीची गोष्ट

पुरातत्त्व खात्यातील शास्त्रज्ञांना एके ठिकाणी उत्खनन करीत असताना चार आयताकृती ताम्रपट सापडले. आकृती ९.१५ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ते ताम्रपट असून त्यावर कोणत्यातरी अगम्य लिपीमध्ये मजकूर लिहिला होता. आतापर्यंत वेगवेगळ्या ठिकाणी सापडलेल्या ताम्रपटात आणि या चार ताम्रपटात एक महत्त्वाचा फरक होता तो म्हणजे आकृतीत काळ्या रंगाने दाखविलेला भाग या चार ताम्रपटात कोरून काढलेला होता. त्यामुळे या ताम्रपटात खिडक्या निर्माण झाल्या होत्या. उत्खननाकरिता तयार केलेला खड्डा फार खोल होता. हे ताम्रपट जड असल्याकारणाने ते क्रेनच्या साहाय्याने वर काढण्याचे ठरले. क्रेनचा हूक ताम्रपटातील एखाद्या खिडकीत अडकवून ते चारी ताम्रपट एकामागोमाग वर काढावयाचे अशी कल्पना होती. या ताम्रपटातील खिडक्या बघून एका शास्त्रज्ञाच्या असे लक्षात

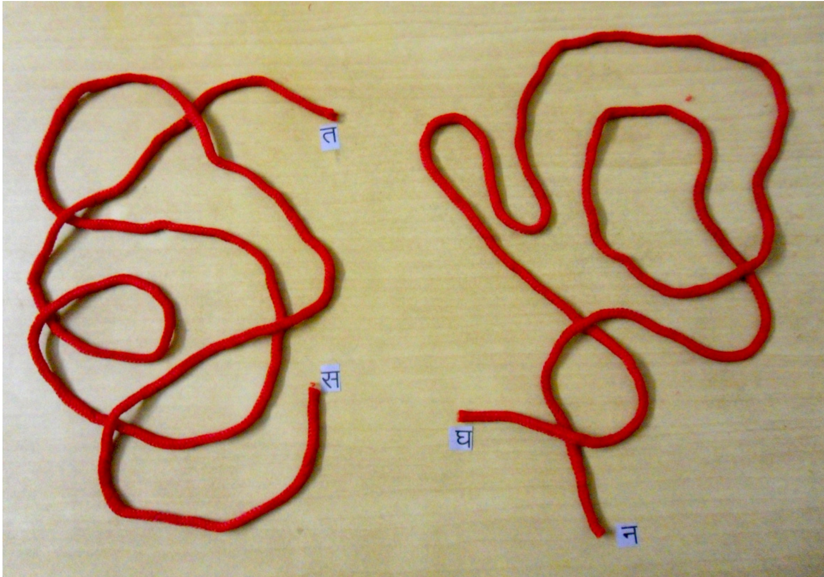
आकृती ९.१५

आले की, हे चारी ताम्रपट एकावर एक ठेवले तर एकच छोटी खिडकी उघडी राहते. तिच्यातून हूक अडकवून हे चारी ताम्रपट एका वेळी वर काढता येतील. या खिडकीचे नेमके स्थान आपण ओळखू शकाल का ?

१४) रेशीमगाठी

नेहमीप्रमाणे दीना मांजरी तिच्या सफेद पिल्लाला आपल्या पंजाने साफ करीत होती. तिच्या काळ्या पिल्लाचे मात्र भलतेच उपद्व्याप चालले होते. ॲलिस आरामखुर्चीत अर्धवट झोपेत लवंडली होती. काळे पिल्लू रेशीम दोरीच्या गुंड्याशी खेळत होते. गुंडा त्याने पार उलगडून टाकला होता. ''गुंड्याच्या दोऱ्यांमध्ये बहुतेक गाठी बसल्या असणार'' ॲलिस म्हणाली.

तिने कात्री घेऊन गुंड्यांचा काही भाग कापून टाकावयास सुरुवात केली. ''या गाठी कोण काढून टाकणार, त्यापेक्षा दोऱ्याचे काही तुकडे काढून टाकावेत. निदान उरलेला गुंडा तरी ठीक असेल'', ॲलिस पुटपुटली.

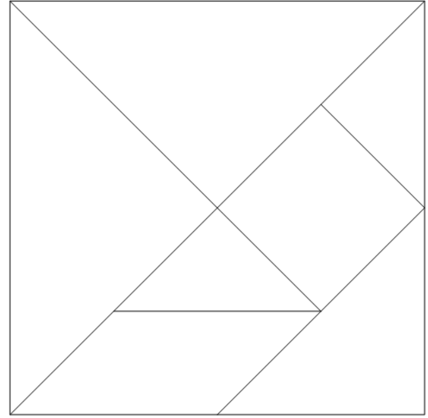


आकृती ९.१६

ऑलिसने कापून फेकून दिलेले गुंड्यांचे दोन तुकडे आकृती ९.१६ मध्ये दाखविले आहेत. यामध्ये दोऱ्यांच्या दोन गुंतवळी आहेत. जर प्रत्येक गुंतवळीची दोन टोके दोन विरुद्ध दिशांना ओढली तर दोऱ्यांना गाठी बसतील काय ?

१५) लहान चौरस, मोठा चौरस

टँग्रॅम हे प्राचीन चिनी कोडे आहे. त्रिकोण, चौरस व समांतरभुज चौकोनाच्या आकारातील सात तुकडे एकमेकांना जोडून त्यांचे विविध आकार बनविता येतात. (आकृती ९.१७).



आकृती ९.१७

सुरेश व मधुकर एकदा खेळण्याच्या दुकानातून ह्या कोड्याचे दोन संच घेऊन आले. सात तुकड्यांतून फक्त एक चौरसच नव्हे तर कितीतरी मजेदार आकृती बनविण्यात रमून गेले.

ते दोघे शाळेत गेले असताना त्यांच्या आजीने ही कोडी बघितली. बघता बघता चुकीने दोन्ही संचातील तुकडे जमिनीवर पडले. साताच्या ऐवजी चौदा तुकडे जमिनीवर बघून आजीला कळेना की आता हे कसे निस्तरावयाचे.

या चौदा तुकड्यांशी खेळताना व ते एकमेकाला जोडताना तिच्या लक्षात आले की, हे सर्व तुकडे एकत्र जोडून पण एक मोठा चौरस बनविता येतो.

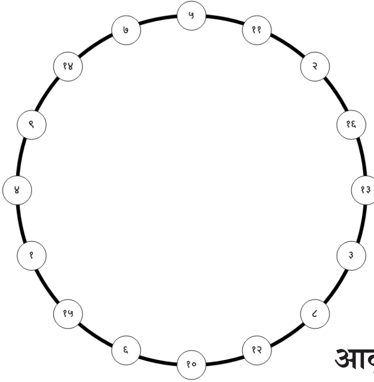
हा चौरस या चौदा तुकड्यांमधून बनविण्याचा तुम्ही प्रयत्न करणार का ?

१६) पुतळ्यांची माळ इथे

प्रा. कल्पना जोशी यांना गणिती कोड्यांची फारच आवड. त्यातल्या त्यात जादूचे चौरस, की ज्यामध्ये सर्व आडव्या ओळींची, उभ्या स्तंभातील व दोन्ही कर्णांवरील अंकांची बेरीज सारखीच येते, त्यात तर त्यांना फारच रस होता. आपली अंगठी जेव्हा त्यांनी सोनाराकडून तयार करून घेतली तेव्हासुद्धा त्या अंगठीवर त्यांनी एखाद्या रत्नखड्याऐवजी जादूचा चौरस कोरून घेतला होता.

तेव्हा आता दिवाळीनिमित्त त्यांनी सोन्याची पुतळी माळ करावयास टाकली. तेव्हा त्यांनी माळेच्या १६ पुतळ्यांवर सोनाराला १ ते १६ अंक कोरण्यास सांगितले. आकृती ९.१८

मध्ये ही माळ आपल्याला दिसते. बाजूला जी चौरस पेटी दिसते आहे तिच्यात १६ खळगे आहेत. प्राध्यापिकाबाई ती माळ या पेटीत अशी ठेवत असत की, माळेतील सर्व पुतळ्या या खळग्यात चपखल बसत असत. माळेमध्ये कोणत्याही जवळ जवळच्या दोन पुतळ्यांमध्ये एवढे अंतर होते की, त्या पुतळ्या जवळजवळच्या खळग्यात बसू शकत असत; परंतु सर्वात मजेची गोष्ट अशी होती की, अशा रीतीने पेटीत तयार झालेल्या पुतळ्यांवरील अंकांचा जादूचा चौरस तयार होत असे. त्यात कोणत्याही आडव्या ओळीत, उभ्या स्तंभात व दोन्ही कर्णांवरील अंकांची बेरीज सारखीच येत असे.

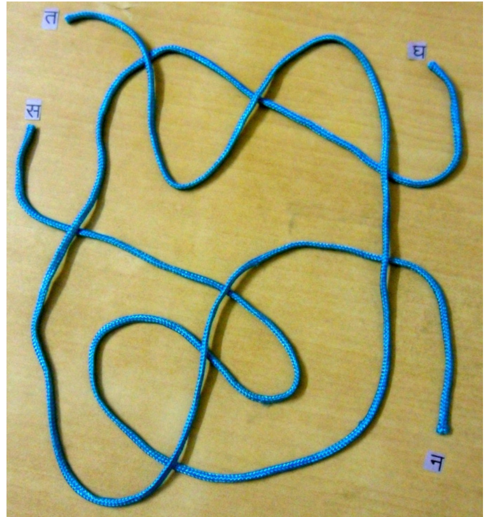


आकृती ९.१८

त्याकरिता ही माळ पेटीत कशी ठेवली पाहिजे ते तुम्ही सांगू शकाल का?

१७) मांजरओढ

कोडे क्रमांक १४ मध्ये आपण पाहिले असेल की दीना मांजरीच्या काळ्या पिल्लाच्या उपद्व्यापांमुळे बिचाऱ्या ॲलिसवर गुंड्याचे तुकडे कापावयाची पाळी आली. मांजरीच्या एका पिल्लाचे हे उपद्व्याप; मग तिच्या चारी पिल्लांनी नंतर जो हैदोस घातला त्याने ॲलिस तर अगदी मेटाकुटीस आली. आकृती ९.१९ मध्ये गुंड्याचे भाग कापून ॲलिसने जमिनीवर

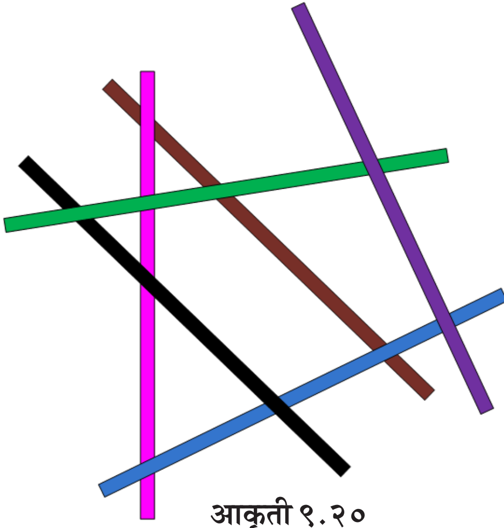


आकृती ९.१९

टाकलेल्या दोन दोऱ्यांची गुंतवळ दाखविली आहे. मांजरीची दोन पिल्ले 'त' आणि 'स' ही दोन टोके तोंडात धरून एका दिशेला पळाली तर दुसरी दोन पिल्ले 'घ' आणि 'न' ही दोन टोके तोंडात धरून विरुद्ध दिशेला पळाली.

काय झाले असेल ? दोन्ही दोरे एकमेकांत गुंतले असतील काय ?

१८) रंगात रंगुनी



आकृती ९.२०

पिंकीच्या घरी गणेशचतुर्थीला गणपतीची मूर्ती आणून तिची साग्रसंगीत पूजा–आरती दररोज सकाळ–संध्याकाळ करून ५ दिवसांनी तिचे विसर्जन करतात. चतुर्थीला अजून दोन दिवस बाकी होते. आरास करण्याकरिता पिंकी आईला मदत करीत होती. वेगवेगळ्या रंगांच्या कागदाच्या पट्ट्या कापून त्यांची टोके एकमेकाला चिकटवून साखळ्या तयार करावयाच्या होत्या. पिंकीने बऱ्याच पट्ट्या कापून तयार ठेवल्या होत्या. पट्ट्या सहा रंगांत होत्या. त्यामुळे पिंकीने सहा सहा पट्ट्यांचे समूह तयार केले होते व ते वेगवेगळे ठेवले होते. आकृती ९.२० मध्ये सहा विविध रंगांच्या पट्ट्यांचा एक समूह दाखविला आहे. या समूहात पट्ट्या एका विशिष्ट क्रमाने एकमेकांवर टाकल्या आहेत. सर्वांत खालची, सर्वात वरची व मधल्या पट्ट्या यांचा क्रम आपण सांगू शकाल काय ?

१९) शब्दच्छल

रमेशच्या वर्गात सांस्कृतिक तासाला बऱ्याच वेळा बाई मुलांना कोडी घालत असत व मुलांना ती सोडविता न आल्यास ती सोडविण्याच्या पद्धती सांगत असत. एकदा त्यांनी वर्गात कोड्यांचे एक पुस्तक आणले. त्यात शब्दखेळांची वेगवेगळी कोडी होती. असेच एक कोडे खालीलप्रमाणे आहे.

खाली दिलेले तीन अक्षरी शब्द पाहा.

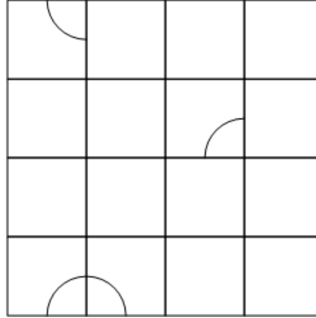
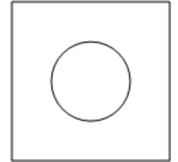
नारद
नारळ
गरळ
गरम

'नारद' या शब्दापासून सुरुवात करून त्यातले कोणतेही एक अक्षर गाळून त्या जागी दुसरे एखादे अक्षर लावून 'नारळ' असा शब्द केला आहे. परत त्याच पद्धतीने शब्द बदलून 'गरळ' हा शब्द व 'गरळ' हा शब्द बदलून 'गरम' हा शब्द केला आहे. म्हणजे एक अक्षर दरवेळी बदलून 'नारद' या शब्दाने सुरुवात करून आपण 'गरम' या शब्दाकडे पोहोचलो आहोत.

या प्रकारे आपल्याला 'सागर' या शब्दापासून सुरुवात करून 'अचला' हा शब्द पायरीपायरीने बनविता येतो का पाहा. त्यानंतर 'कपोल' या शब्दाने सुरुवात करून 'मलीन' असा शब्द बनवा. हे शब्द बनविताना किती पायऱ्या वापराव्या लागतात यावर काही बंधन नाही.

२०) वर्तुळ घड्या

सागर ओरिगामी कलेमध्ये वाकबगार आहे. कागदाच्या वेगवेगळ्या प्रकारे घड्या घालून पक्षी, प्राणी, कीटक आणि अर्थातच वेगवेगळ्या प्रकारच्या होड्या करण्यात त्याच्या शाळेत कोणीही त्याचा हात धरणारा नाही. खालील कोडे त्याला त्याच्या वडिलांनी घातले व ते ओरिगामीशी संबंधित आहे असेच काही नाही परंतु कागदाच्या घड्या घालण्यातील नैपुण्याची त्यात परीक्षा लागते.

आकृती ९.२१

आकृती ९.२१ मध्ये ८ सें.मी. × ८ सें.मी. आकाराचा कागदाचा चौरस तुकडा दाखविला आहे. वर्तुळाचे चार चतकोर कागदावर असलेल्या घरांमध्ये दिसतात. कागदावर एकूण ४×४ अशी १६ घरे आडव्या व उभ्या रेषा आखून तयार केली आहेत. कागदाची मागची

बाजू रंगीत आहे. या कागदाच्या आता आपल्याला घड्या घालावयाच्या आहेत. घड्या फक्त कागदावर दाखविलेल्या आडव्या आणि उभ्या रेषांवरच घालावयाच्या आहेत. या घड्या अशा रीतीने घालावयाच्या आहेत की शेवटी कागदावर आकृतीप्रमाणे पूर्ण वर्तुळ दिसेल.

सागरने हे कोडे सोडविण्याचा आटोकाट प्रयत्न केला. तुम्ही त्याला मदत करणार का?

२१) जरा सरकून घ्या (१)

कोडे क्र. १६ मध्ये आपल्याला भेटलेल्या प्राध्यापिकाबाईंचे जादूच्या चौरसांचे प्रेम आपल्याला माहिती आहेच. एकदा त्यांनी Sam Loyd चे कोड्यांचे प्रसिद्ध पुस्तक वाचले. त्यातील १ ते १५ अंकांचे फार प्रसिद्ध झालेले Sliding Blocks कोडे त्यांना फार आवडले. या कोड्याचा जादूच्या चौरसाकरिता उपयोग करता येईल असे त्यांना वाटले. त्यातून खालील कोडे निर्माण झाले.

२	४	५
६	९	३
८	१	७

आकृती ९.२२

आकृती ९.२२ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एका ३ × ३ चौरस पेटीत पुठ्ठ्याचे छोटे ८ चौरस तुकडे आहेत. त्यावर २ ते ९ अंक काढलेले आहेत. पेटीमध्ये तळाशी मधोमध असलेल्या घरात १ अंक काढला आहे व हे घर रिकामे आहे. पुठ्ठ्याचे छोटे तुकडे एका वेळी एक अशा रीतीने रिकाम्या असलेल्या घरात सरकवून आपण आकृती ९.२३ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे असा चौरस निर्माण करावयाचा आहे की, आडव्या ओळीत उभ्या स्तंभात व दोन्ही कर्णांवरील अंकांची बेरीज प्रत्येकी १५ येईल.

२	९	४
७	५	३
६	१	८

आकृती ९.२३

२२) जरा सरकून घ्या (२)

हे कोडेसुद्धा प्राध्यापिकाबाईंनी तयार केले व ते २१ क्रमांकाच्या कोड्याप्रमाणेच आहे; परंतु येथे ४ × ४ चा

१६	३	१३	८
२	११	१०	६
५	१४	७	१२
९	४	१५	१

आकृती ९.२४

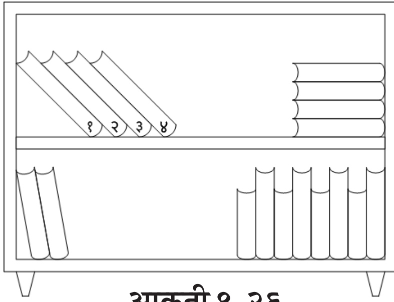
चौरस आहे. पुठ्ठ्यांच्या तुकड्यांवर २ ते १५ अंक आहेत व पेटीमध्ये दोन घर मोकळी असून त्यावर १६ व १ असे अंक आहेत. पुठ्ठ्यांचे तुकडे क्रमाक्रमाने आडवे व उभे सरकवून आकृती ९.२४ मध्ये असलेली रचना बदलून आकृती ९.२५ मध्ये असलेला जादूचा चौरस तयार करणे आहे.

१६	२	३	१३
५	११	१०	८
९	७	६	१२
४	१४	१५	१

आकृती ९.२५

२३) पुस्तकातील किडा

दिलीपने त्याच्या कपाटातील पुस्तकांना बरेच दिवस हात लावला नव्हता. आकृती ९.२६ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे विश्वकोशाचे ४ भाग कपाटात तसेच पडून होते. दिलीप शाळेमध्ये शिक्षक होता. एकदा त्याला पाण्याचे प्रदूषण या विषयासंबंधी माहिती गोळा करून तो विषय मुलांना शिकवावयाचा होता. विश्वकोशातून ती माहिती मिळवावी म्हणून त्याने विश्वकोशाचा भाग दोन उघडला. पाहतो तर एका किड्याने विश्वकोश पार पोखरून टाकला होता. चारही विश्वकोशांची तीच गत होती. विश्वकोशाच्या पहिल्या भागाच्या शेवटच्या पानापासून सुरुवात करून पोखरत पोखरत विश्वकोशाच्या चौथ्या भागाच्या पहिल्या पानापर्यंत सरळ आडव्या रेषेत विश्वकोश पोखरलेले होते.



आकृती ९.२६

जर प्रत्येक विश्वकोशाच्या सर्व पानांची जाडी ३ सें.मी. असेल व त्याच्या प्रत्येक पुठ्ठ्याच्या कव्हरची जाडी १/४ सें.मी. असेल तर पोखरलेल्या सरळ आडव्या मार्गाची लांबी किती असेल ?

२४) कमीत कमी वेळात सोडवा

वर्गात बाई 'वेळ मोजण्याची साधने' हा विषय शिकवीत होत्या. मुलांना दाखविण्याकरिता त्यांनी दोन वाळूची घड्याळे आणली होती. घड्याळाच्या वरच्या कप्प्यात असलेली सर्व वाळू हळूहळू खालच्या कप्प्यात एका विशिष्ट वेळात जमा होत असे. त्यापैकी एका घड्याळात याकरिता ७ मिनिटे व दुसऱ्या घड्याळात याकरिता ११ मिनिटे लागत असत.

बाईंनी मुलांना याचे प्रात्यक्षिक करून दाखविले व आपल्या मनगटावरील घड्याळाच्या वेळेशी तुलना करून ती वाळूची घड्याळे बरोबर ७ मिनिटे व ११ मिनिटे वेळ दाखवितात याची खात्री करून दिली.

''पण आपल्याला जर समजा ३० मिनिटे वेळ मोजावयाचा असेल तर काय करावयाचे ? ही घड्याळे तर फक्त ७ मिनिटे व ११ मिनिटे वेळ दाखवितात.'' एका मुलाने प्रश्न विचारला.

''या घड्याळांच्या साहाय्याने ३० मिनिटे वेळ मोजणे पण शक्य आहे, पण त्याकरिता थोडे डोके चालवावयास लागेल.'' बाई उत्तरल्या.

आपण सांगू शकाल काय ?

२५) सकाळचा चहा

रोज सकाळी आमच्याकडे दूध द्यावयाला एक भय्या येतो. आम्हांला दररोज फक्त १ लिटर दूध लागते. आमच्या शेजारच्या कुटुंबात बरीच माणसे आहेत. त्यांना आमच्यापेक्षा जास्त दूध लागते. भय्याकडे १ लिटरचे माप आहे, त्यामुळे आम्हांला दूध द्यावयास त्याला सोपे जाते. एकदा सकाळी भय्या १ लिटरचे माप आणावयास विसरला. त्याचे दुधाचे भांडे ८ लिटरचे असून ते दुधाने पूर्ण भरलेले होते. शिवाय त्याच्याकडे ३ व ५ लिटरची अशी दोन रिकामी मापे होती. आता ही मापे वापरून भय्या १ लिटर दूध कसा काय देणार हा प्रश्न पडला. माझ्या छोट्या मुलाला कोडी सोडविण्याचा छंद आहे. त्याने थोडा विचार करून भय्याला बरोबर मार्ग सुचविला. अर्थातच दूध भांड्यातून वेगवेगळ्या मापांत व मापातून भांड्यात ओतावयाची कसरत दूध न सांडता बऱ्याच वेळा करावी लागली.

मग आमचा सकाळचा चहा आम्हांला वेळेवर कसा काय मिळाला ते सांगाल काय ?

२६) डोंगर पोखरून उंदीर

मोडक सर आज वर्गात समीकरणे शिकवत होते. दोन अव्यक्तांमध्ये दोन समीकरणे मिळाली तर अव्यक्तांच्या किमती कशा काढावयाच्या हे त्यांनी फळ्यावर एका उदाहरणाने समजावून दिले. जेवढी अव्यक्ते तेवढी समीकरणे पाहिजेत म्हणजे अव्यक्तांच्या किमती एक ठरावीक पद्धती वापरली तर काढणे शक्य होते. हा त्यांचा मुद्दा मुलांना पटला. मग त्यांनी फळ्यावर खालील दोन समीकरणे लिहून काढली.

६३००० क्ष + ३७००० य = १६३०००

३७००० क्ष + ६३००० य = १३७०००

''आता या समीकरणांकडे नीट लक्ष द्या. मनातल्या मनात आकडेमोड करून ही समीकरणे सोडवून 'क्ष' व 'य' यांच्या किमती काढून दाखविता येतील का ? वासंती, तू प्रयत्न करणार का ?'' सरांनी दुसऱ्या बाकावर बसलेल्या वासंतीला विचारले.

वासंती उभी राहिली व म्हणाली, ''सर, ही समीकरणे सोडविण्याकरिता पहिल्या समीकरणाला ३७००० ने गुणावे लागेल व दुसऱ्या समीकरणाला ६३००० ने गुणावे लागेल आणि मग या गुणाकारानंतर मिळालेल्या दोन्ही नवीन समीकरणांची वजाबाकी केल्यानंतर त्यातले एक अव्यक्त बाद होईल. तेव्हा कोठे दुसऱ्या अव्यक्ताची किंमत कळेल. बाद झालेल्या अव्यक्ताची किंमत काढण्याकरिता आणखी आकडेमोड करावी लागेल व हे सर्व मनातल्या मनात करणे कठीण आहे.''

''समीकरणाकडे नीट लक्ष देऊन पाहिल्यास यापेक्षा सोपी पद्धत तुमच्या ध्यानात येईल.'' सर म्हणाले.

वासंतीला समीकरणे सोडविण्याकरिता तुम्ही मदत करणार का ?

२७) अंकांचा खो खो

जोशी सर वर्गात आले व म्हणाले, ''आज आपण अंकांचा खो खो खेळूया. त्याकरिता तुम्हांला चार अंकी संख्येची जरुरी आहे.'' उदाहरणादाखल त्यांनी फळ्यावर खालील संख्या लिहून काढली.

४३२९

''आता आपण ४ ह्या अंकाला खो देऊन तो अंक वरील संख्येच्या शेवटी टाकूया म्हणजे ही संख्या अशी दिसेल.'' सर म्हणाले आणि त्यांनी ती संख्या खालीलप्रमाणे लिहून काढली.

३२९४

''आता परत एकदा वरचीच कृती करूया म्हणजे ती संख्या अशी दिसेल'' सर म्हणाले आणि त्यांनी फळ्यावर ती संख्या लिहून काढली.

२९४३

''आता हे तुम्ही करून पाहा'' सर म्हणाले व त्यांनी पहिल्या बाकावर बसलेल्या कल्पना, शालिनी, मोहिनी व राधिका यांना प्रत्येकीला एक चार अंकी संख्या वहीत लिहून वरीलप्रमाणे अंकांना दोन वेळा खो देऊन नवीन संख्या तयार करण्यास सांगितले. ''आता सुरुवातीला लिहिलेली संख्या व दोन वेळा खो देऊन नवीन तयार झालेली संख्या यांची बेरीज करून ती संख्या फळ्यावर लिहून दाखवा.'' सर त्या चौघीजणींना म्हणाले.

चारही मुलींनी बेरीज करून आलेल्या संख्या खालीलप्रमाणे फळ्यावर लिहिल्या.

कल्पना – ६५६५
शालिनी – १३१३०
मोहिनी – ६२६३
राधिका – ९९९९

सरांनी फळ्याकडे नजर टाकली.

''मोहिनी तुझी नक्कीच काही तरी चूक झाली आहे.'' सर म्हणाले.

सर असे का म्हणाले हे तुम्ही सांगू शकाल काय ?

२८) या सम हा

प्रकरण ८ मध्ये 'विषमे विजयी भव' असा दोघांनी मिळून खेळावयाचा एक खेळ दिलेला आहे. हा तशाच प्रकारचा एक खेळ आहे. मोहन व सुरेश यांना आगपेटीतील काड्यांची बरीच कोडी माहिती होती. काड्या एकमेकीला जोडून त्यांचे भूमितीतील वेगवेगळे आकार करून मग त्यातल्या काही काड्यांचे स्थान बदलून आणखी वेगळे आकार करण्याची ती कोडी होती. अशी कोडी सोडवून दमल्यानंतर ते त्यांच्या बाबांकडे गेले. बाबा शाळेमध्ये गणिताचे शिक्षक होते. त्यांनी मग एक नवीनच खेळ सुचविला. तो याप्रमाणे आहे.

आगपेटीतील २७ काड्या घ्यावयाच्या. दोघांनी पाळीपाळीने १ ते ४ काड्या उचलावयाच्या. सर्व काड्या संपल्यानंतर ज्याच्याकडील काड्यांची संख्या सम भरेल तो जिंकला असे समजावयाचे.

हा खेळ हमखास जिंकण्याची मार्गपद्धती बाबांनी त्या दोघांना सांगितली नाही. तुम्ही ती शोधून काढाल काय ?

२९) पोळ्यांमध्येसुद्धा गणित ?

आईने सुमाला पोळ्या करावयास नुकतेच शिकवले होते. पोळ्या लाटावयास नक्कीच फार कठीण होते, पण त्या भाजणेही काही फार सोपे नव्हते. शिवाय पोळ्या करपू नये म्हणून त्या उलटसुलट करून भाजाव्या लागत होत्या. सुमा त्यात फारच तरबेज झाली. नेहमीच्या वर्तुळाकृती तव्यावर पोळी भाजताना ती एका बाजूवर भाजावयास ठेवली की नंतर ती पलटून दुसऱ्या बाजूवर भाजावयास ठेवावी लागे. ही कृती दोनदा करावी लागे. म्हणजे प्रत्येक बाजूवर पोळी दोनदा भाजली जात असे व अशी छान भाजलेली पोळी खाण्यास मजा येत असे.

पोळी एका बाजूवर भाजण्यास २० सेकंद लागत असत. म्हणजे एक पोळी दोन्ही बाजूवर प्रत्येकी दोनदा भाजण्यास ८० सेकंद लागत असत. सुमा शाळेत जाताना डब्यामध्ये ३ पोळ्या नेत असे म्हणजे या ३ पोळ्या भाजण्यास तिला २४० सेकंद लागत असत.

सुमाची आई एकदा बाजारामधून नवीन आयताकृती तवा घेऊन आली. या तव्यावर एका वेळी दोन पोळ्या बाजू बाजूला ठेवून भाजता येत होत्या.

सुमाने लगेच हिशेब केला. समजा, दोन पोळ्या एकदम भाजल्या तर त्या दोन्ही बाजूवर प्रत्येकी दोनदा भाजावयास ४ × २० = ८० सेकंद लागतील. त्यानंतर तिसरी पोळी तव्यावर भाजली तर ती दोन्ही बाजूवर प्रत्येकी दोनदा भाजण्याकरिता आणखी ४ × २०= ८० सेकंद लागतील. म्हणजे, एकंदर ८० + ८० = १६० सेकंद लागतील. पूर्वीच्या तव्यावर २४० सेकंद लागावयाचे म्हणजे आता ८० सेकंदांची बचत होईल असा तिने विचार केला व तसे तिने आईला सांगितले. आईचे गणित मात्र पक्के होते. तिला खात्री होती की, वेळेची आणखी बचत होऊ शकते. सोडवा पाहू हे पोळ्यांचे गणित.

३०) एक केक अकराजणांत

ते अकराजण दर संध्याकाळी न चुकता शिवाजी पार्कच्या कट्ट्यावर एकत्र जमत असत. सगळ्यांची वयं ६५ च्या वर. मात्र जीवन हौसेने जगत असत. राजकारणावर गप्पा मारताना वेळ कसा जात असे ते समजत नसे. एकमेकांचे वाढदिवस साजरे करावयास चुकत नसत.

एकदा त्यातील भाऊसाहेबांचा वाढदिवस साजरा करावयास त्यांच्या घरी हे सर्वजण जमले होते. भाऊसाहेब सध्या घरी एकटेच होते. त्यांचा मुलगा, सूनबाई व दोन नातू १५ दिवसांच्या परदेशवारीवर गेले होते.

मॉंजिनीजमधून वर्तुळाकृती केक आणला होता. शेवटी केक कापावयाची वेळ आली. आप्पासाहेबांनी भाऊसाहेबांच्या हातात सुरी ठेवली. भाऊसाहेबांनी मेणबत्ती फुंकर मारून विझवली. सर्वजण "Happy Birth Day To You" म्हणाले. तितक्यात आप्पासाहेबांना थोडी गंमत करावयाची लहर आली. नाहीतरी त्यांनी शाळेत गेली ४० वर्षे गणित हा विषय शिकविला होता.

''हे पाहा भाऊसाहेब, सुरीने सरळ रेषेत ४ वेळा कापून केकचे बरोबर आपल्याला पाहिजेत तेवढे म्हणजे ११ तुकडे करावयाचे. जास्त नाहीत आणि कमी तर बिलकूल नाहीत.'' आप्पासाहेब म्हणाले.

भाऊसाहेब विचारात पडले. त्यांनाही गंमत करावयाची लहर आली.

''बघा हं, मी ४ वेळा कापून ११ तुकडे करून दाखवितो, पण लहान मोठे तुकडे होतील. तुमच्यापैकी काहीजणांना केकचे फार छोटे तुकडे मिळतील. मग मला दोष देऊ नका.'' भाऊसाहेब म्हणाले.

''नाहीतरी आपल्यापैकी काहीजणांना गोड फार खावयाचे नाहीच आहे. तेव्हा दोष देण्याचा प्रश्नच नाही आहे.'' आप्पासाहेब उत्तरले.

सांगा पाहू, भाऊसाहेबांनी केकचे कसे तुकडे केले असतील ?

प्रकरण १०
इये कूट प्रश्नांचिये नगरी उत्तरांचा सुकाळ करी

गुंतुनी गुंत्यात साऱ्या

१) कलाकारांचा गुंता

हे कोडे सोडविण्याकरिता तक्ता १०.१ करूया.

	नर्तक	चित्रकार	गायक	नकलाकार
सुरेश				
नीलेश				
प्रथमेश				
ज्ञानेश				

तक्ता १०.१

विधान 'अ' वरून असे दिसते की सुरेश व प्रथमेश गायक असू शकत नाहीत. त्यामुळे गायक या उभ्या स्तंभात, सुरेश व प्रथमेश यांच्या आडव्या ओळीत फुल्या दाखवूया.

त्याचप्रमाणे विधान 'ब' वरून असे दिसते की, नीलेश चित्रकार असू शकत नाही व तो नकलाकारही असू शकत नाही. त्यामुळे चित्रकार व नकलाकार या उभ्या स्तंभात नीलेशच्या आडव्या ओळीत फुल्या दाखवूया. फुल्या दाखविल्यानंतर तक्ता १०.१ मध्ये तक्ता १०.२ प्रमाणे बदल होतील.

विधान 'क' वरून असे दिसते की, ज्ञानेश व सुरेश नकलाकार असू शकत नाहीत.

	नर्तक	चित्रकार	गायक	नकलाकार
सुरेश			×	
नीलेश		×		×
प्रथमेश			×	
ज्ञानेश				

तक्ता १०.२

त्यामुळे नकलाकार या उभ्या स्तंभात व ज्ञानेश व सुरेश यांच्या आडव्या ओळीत फुल्या दाखवूया.

नकलाकार या उभ्या स्तंभात आता तीन ठिकाणी फुल्या झाल्याकारणाने चौथी रिकामी जागा प्रथमेशच्या आडव्या ओळीत येते म्हणून प्रथमेश नकलाकार आहे असा निष्कर्ष निघतो.

या जागेत आता शून्य दाखवूया. त्याचप्रमाणे प्रथमेशच्या आडव्या ओळीत नर्तक व चित्रकार यांच्या उभ्या स्तंभात फुल्या दाखवूया.

तक्ता १०.२ चे रूपांतर आता तक्ता १०.३ मध्ये होईल.

	नर्तक	चित्रकार	गायक	नकलाकार
सुरेश			×	×
नीलेश		×		×
प्रथमेश	×	×	×	०
ज्ञानेश				×

तक्ता १०.३

विधान 'ब' प्रमाणे चित्रकाराने नकलाकाराचे (म्हणजे प्रथमेशचे) चित्र काढले होते व विधान 'ड' प्रमाणे प्रथमेश व सुरेश यांची ओळख नाही. म्हणजे सुरेश चित्रकार असू शकत नाही म्हणून चित्रकार या उभ्या स्तंभात व सुरेशच्या आडव्या ओळीत फुली दाखवूया. सुरेशच्या आडव्या ओळीत नर्तक या उभ्या स्तंभात आता एक जागा रिकामी राहते, म्हणून सुरेश नर्तक आहे, असा निष्कर्ष निघतो. त्या जागेत आता शून्य दाखवूया.

त्याचप्रमाणे चित्रकार या उभ्या स्तंभात व ज्ञानेशच्या आडव्या ओळीत एक रिकामी जागा

	नर्तक	चित्रकार	गायक	नकलाकार
सुरेश	०	×	×	×
नीलेश		×		×
प्रथमेश	×	×	×	०
ज्ञानेश		०		×

तक्ता १०.४

राहते. ज्ञानेश हा चित्रकार आहे असा त्यातून निष्कर्ष निघतो. त्या जागेत आता शून्य दाखवूया. तक्ता १०.३ चे रूपांतर आता तक्ता १०.४ मध्ये होईल.

तक्ता १०.४ मध्ये शून्याच्या स्थानांवरून सुरेश हा नर्तक आहे, प्रथमेश हा नकलाकार आहे व ज्ञानेश हा चित्रकार आहे असे दिसते. म्हणजे नीलेश हा गायक असला पाहिजे असा निष्कर्ष निघतो.

२) कौटुंबिक गुंता

गणेश, राजश्री, शंकर
राजेश, जयश्री, विष्णू
मंगेश, मंदा, कृष्णा

३) बँकेमधील बुद्धिबळाचा गुंता

देशपांडे – प्रबंधक
रानडे – लिपीक
सावंत – हिशेब तपासनीस
गायकवाड – उपप्रबंधक

हा माझा मार्ग एकला

ऑयलरने केलेल्या अभ्यासातून या प्रकारची कोडी सोडविण्याची पद्धती समजते.

अ) आकृतीतील ज्या बिंदूपाशी मिळणाऱ्या बिंदूमार्गांची संख्या सम असते (२, ४, ६ वगैरे) त्या बिंदूंना 'सम' बिंदू म्हणूया.

ब) ज्या बिंदूंपाशी मिळणाऱ्या बिंदूमार्गांची संख्या विषम असते (१, ३, ५ वगैरे) त्या बिंदूंना 'विषम' बिंदू म्हणूया.

क) आकृतीत सर्व बिंदू 'सम' असतील तर आकृती गिरविताना कोठल्याही एका बिंदूपासून सुरुवात करता येते व संपूर्ण आकृती गिरविल्यानंतर आपण त्याचे बिंदूपाशी परत येतो.

ड) आकृतीत तर दोनच 'विषम' बिंदू असतील व बाकीचे बिंदू 'सम' असतील तर गिरविण्याची सुरुवात कोणत्याही एका विषम बिंदूपासून करून संपूर्ण आकृती गिरवून शेवट दुसऱ्या विषम बिंदूवर करावा लागतो.

इ) आकृतीत २ पेक्षा जास्त विषम बिंदू असल्यास सर्व अटींचे पालन करून आकृती गिरविणे शक्य नाही.

आता या प्रकरणांतील कोड्यांच्या उत्तरांकरिता मूळ प्रकरणातील आकृत्या परत बघा.

अ) आकृती ५.१ मध्ये सर्व बिंदू ‘सम’ आहेत. कोणत्याही बिंदूपासून सुरुवात करून शेवटी त्याच बिंदूपाशी येऊन ही आकृती गिरविता येते. उदाहरणार्थः

१–२–६–३–७–४–८–५–१–८–७–६–१

ब) आकृती ५.२ मध्ये बिंदू १ व बिंदू ७ हे दोन ‘विषम’ बिंदू आहेत. बाकीचे बिंदू ‘सम’ आहेत. त्यामुळे ही आकृती खालीलप्रमाणे गिरविता येते.

१–६–४–२–६–५–३–६–७

क) आकृती ५.३ मध्ये बिंदू १, बिंदू २, बिंदू ४ आणि बिंदू ५ असे ४ विषम बिंदू आहेत म्हणून ही आकृती सर्व नियमांचे पालन करून गिरविणे शक्य नाही. ही आकृती गिरविण्याचे एक फसवे उत्तर आकृती १०.१ ते आकृती १०.६ मध्ये पायरीपायरीने दाखविले आहे. आकृती खालीलप्रमाणे गिरविली जाते.

१–२–३–१–३–२–४–१–५–२

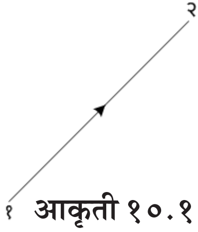
या गिरविण्याच्या पद्धतीत नीट पाहिल्यास असे लक्षात येते की, आकृती १०.३, १०.४ व १०.५ मध्ये बिंदूमार्गाचा काही भाग दोन वेळा गिरविला जातो. हे नियमात बसत नाही.

ड) आकृती १०.७ पाहा. हिच्यात १ आणि २ हे बिंदू ‘विषम’ आहेत व बाकीचे बिंदू ‘सम’ आहेत. बिंदू ‘१’ पासून सुरुवात करून बिंदू ‘२’ वर शेवट केल्यास आपल्याला ही आकृती गिरविणे शक्य होईल.

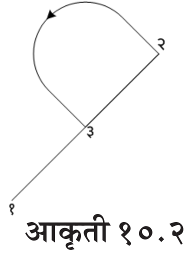
इ) मूळ प्रकरणातील आकृती ५.६ मधली रांगोळी आता पाहा. अगोदर तयार केलेले जास्तीचे बिंदूमार्ग गृहीत धरून आणखी आठ बिंदूमार्ग खालील बिंदूंमध्ये तयार करा.

बिंदूपासून	**बिंदूंपर्यंत**
३	५
८	१०
१०	१३
१८	२०
२३	२५
२८	३०
३३	३५
३८	४०

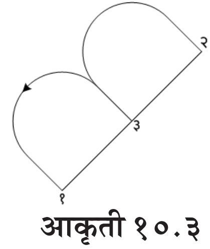
इतके झाल्यानंतर या रांगोळीचे सर्व बिंदू 'सम' होतात. आता कोणत्याही एका बिंदूपासून सुरुवात करून त्याच बिंदूवर शेवट होईल, अशा पद्धतीने ही रांगोळी गिरविणे शक्य होईल.



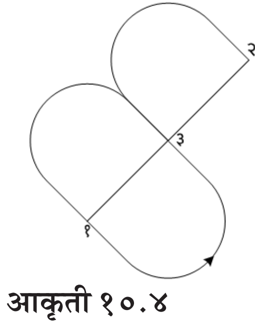
आकृती १०.१



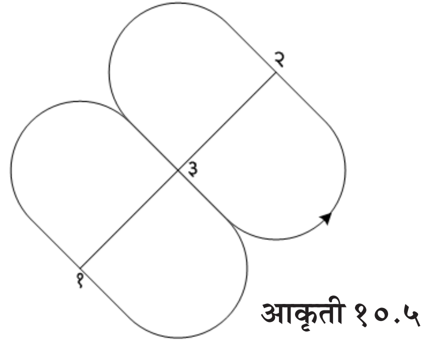
आकृती १०.२



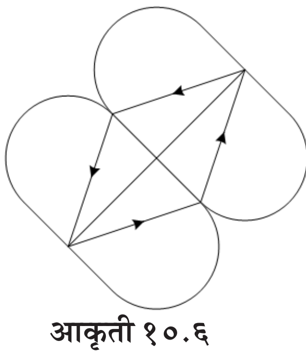
आकृती १०.३



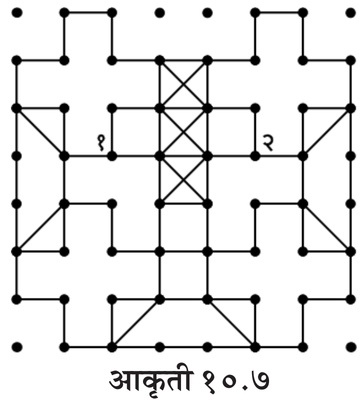
आकृती १०.४



आकृती १०.५



आकृती १०.६

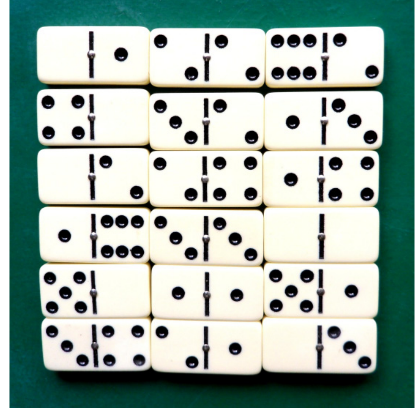


आकृती १०.७

ही जादुभरी, चौरसांची नवलनगरी (आकृती १०.८ ते १०.१० पाहा)

२६	२१	९	४	४८	३६	३१
४४	३९	३४	२२	१७	१२	७
२०	८	३	४७	४२	३०	२५
३८	३३	२८	१६	११	६	४३
१४	२	४६	४१	२९	२४	१९
३२	२७	१५	१०	५	४९	३७
१	४५	४०	३५	२३	१८	१३

आकृती १०.८



आकृती १०.९

आकृती १०.१० ६५

५	८	२०	९	२२	६४
१९	२३	१३	१०	२	६७
२१	६	३	१५	२५	७०
११	१८	७	२४	१	६१
१२	१४	१७	४	१६	६३
६८	६९	६०	६२	६६	७१

विलग करा यांना/ करा यांचे मीलन

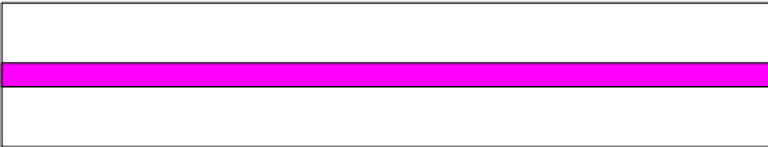
१) आग्र्याहून सुटका

मूळ कोड्याच्या आकृती ७.७ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे ‘प’ येथे दर्शविलेला दोरीच्या वेढ्याचा भाग प्लास्टिकमधील असलेल्या चारी कोपऱ्यातील छिद्रांमधून एकामागोमाग आत घालून त्या वेढ्यांमधून मणी पार करून तो वेढा छिद्रातून परत वर ओढून घ्यावा. असे चारही कोपऱ्यातील छिद्रांमध्ये केल्यास बांगडी सोडविण्याचा मार्ग सापडेल.

हे कोडे आपल्याला वेगवेगळ्या आकारात तयार करता येईल. त्रिकोणाकृती वा षट्कोनाकृती केल्यास तीन दोरे वा सहा दोरे वापरता येतील. मधला दुहेरी दोरा कायम राहील. कोडे सोडविण्याची पद्धती तीच राहील.

२) मोबियस वलय क्रमांक १ व २

आकृती १०.११ मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे कागदाच्या पट्टीच्या दोन्ही पृष्ठभागांवर मधोमध एक रंगीत पट्टी आखून घेऊन नंतर त्यांची वलये तयार केली तर कात्रीने या पट्ट्यांच्या मध्यरेषेवर कापल्यानंतरसुद्धा कडांवर या रंगीत पट्ट्याचे अंश दिसत राहतील. ज्या कडांवर हे अंश दिसत राहतील त्याच कडा आपल्याला परत एकमेकांच्या जवळ आणून चिकटवावयाच्या आहेत. हे लक्षात घेऊन आपल्याला कापण्याच्या पूर्वीचे वलय तयार करता येईल. हे करावयाससुद्धा बरेच कौशल्य लागेल. कडा एकमेकांना चिकटवताना त्या थोड्या एकमेकांवर येतील अशा तऱ्हेने चिकटवणे शक्य होईल.



आकृती १०.११

खेळ खेळूया दोघे आपण

१) विषमे विजयी भव

समजा, तुमची खेळण्याची पहिली पाळी आहे. तुम्ही या पाळीत २ मणी घ्या. या खेळात अंकांच्या खालील साखळ्या लक्षात ठेवा.

साखळी 'अ' ३, ८, १५, २०, २७, ३२

साखळी 'ब' २, ९, १४, २१, २६, ३३

या साखळ्यांवर तुम्ही ताबा मिळवला पाहिजे. तुमची पाळी येईल तेव्हा तुम्ही इतके मणी घेतले पाहिजेत की, तुमच्या पाळीनंतर दोघांनी मिळून तोपर्यंत जमा केलेल्या मण्यांची संख्या वरीलपैकी एका साखळीतील अंकाएवढी होईल. पण हे पाहण्याकरिता वरीलपैकी कोणत्या साखळीतील अंक निवडावयाचा ? याकरिता प्रतिस्पर्ध्याने तोपर्यंत जमा केलेल्या मण्यांची संख्या सम आहे की विषम आहे याची माहिती आपणास ठेवावी लागेल. तुम्ही खेळावयाच्या अगोदर प्रतिस्पर्ध्याकडे असलेल्या मण्यांची संख्या जर विषम असेल तर वर दिलेल्या दोन्ही साखळीतील वरची साखळी 'अ' तुमच्या उपयोगाची आहे. तुम्ही खेळावयाच्या अगोदर प्रतिस्पर्ध्याकडे असणाऱ्या मण्यांची संख्या जर सम असेल, तर खालची साखळी 'ब' तुमच्या उपयोगाची आहे.

अशा रीतीने तुमची खेळाची पाळी जेव्हा असेल तेव्हा तोपर्यंत प्रतिस्पर्ध्याकडे जमा

पाळी	तुमची खेळी	तुम्ही वापरलेली अंकांची साखळी	प्रतिस्पर्ध्याची खेळी	प्रतिस्पर्ध्याकडील एकूण मणी	दोघांकडील एकूण मणी
१	२	ब	३	३ (विषम)	५
२	३	अ	५	८ (सम)	१३
३	१	ब	४	१२ (सम)	१८
४	३	ब	५	१७ (विषम)	२६
५	१	अ	४	२१ (विषम)	३१
६	१	अ	१	२२	३३
	११		२२		
	विषम				
	तुम्ही जिंकलात				

तक्ता १०.५

झालेल्या मण्यांची संख्या विषम किंवा सम असेल त्याप्रमाणे तुम्हांला अंकांची वरची साखळी किंवा खालच्या साखळीची निवड करावी लागेल व इतके मणी घ्यावे लागतील की तुम्ही मणी घेतल्यानंतर दोघांनी मिळून तोपर्यंत घेतलेल्या मण्यांची संख्या तुम्ही निवड केलेल्या साखळीतल्या अशा अंकाशी जुळेल की एकावेळी १ ते ५ मणी घेण्याच्या अटींची पूर्तता होईल.

उदाहरणादाखल एक खेळ तक्ता १०.५ मध्ये दाखविला आहे. वरील खेळावर आधारलेल्या एका सोप्या यंत्राचा उल्लेख मनोगत (१) मध्ये आला आहे.

आकृती १०.१२ मध्ये हे यंत्र दाखविलेले आहे.

मानवी प्रतिस्पर्ध्याबरोबर हे यंत्र हा खेळ खेळत असे व खेळाची पहिली पाळी घेऊन तो खेळ हमखास जिंकत असे.



आकृती १०.१२

कोड्यांची माळ इथे

१) आजीची रंगीत गोधडी

मूळ आकृती ९.१ चे आपण निरीक्षण केल्यास असे दिसते की, त्यात त्रिकोणांचे समूह आहेत. हे समूह वेगवेगळ्या रंगाच्या ठिगळांनी खालीलप्रमाणे बनले आहेत.

१ त्रिकोणाचा समूह – लाल
२ त्रिकोणांचा समूह – पिवळा
३ त्रिकोणांचा समूह – हिरवा
४ त्रिकोणांचा समूह – निळा

आकृतीच्या तळाशी उजव्या कोपऱ्यातील समूह ३ त्रिकोणांचा बनला आहे. त्यामुळे वरील नियम पाळून त्याचा रंग हिरवा असला पाहिजे.

२) कोंबड्या विक्रीतील जादू (आकृती क्र. १०.१३ पाहा.)

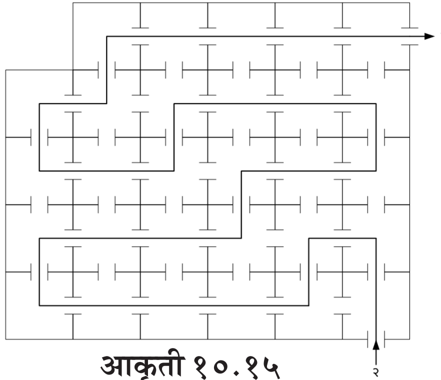
३) उघड दार देवा – अननस (रायते अननसाचे होते.)

१ १३	४ १६	१४ २	१५ ३
८ १२	५ ९	११ ७	१० ६

आकृती १०.१३

			१७
(१)	(२) (२)	(५) (२)	१२
(२) (१)	(२)	(५)	१०
(५) (२) (१)	(५) (२) (२)	(५) (१)	२३
१२	१५	१८	९

आकृती १०.१४



आकृती १०.१५

	१			२			३
४		५		६			
						७	
८							११
		९					
					१०		

आकृती १०.१६

४) पंचेचाळीस रुपयांच्या बक्षिसाची गोष्ट – (आकृती १०.१४ पाहा)

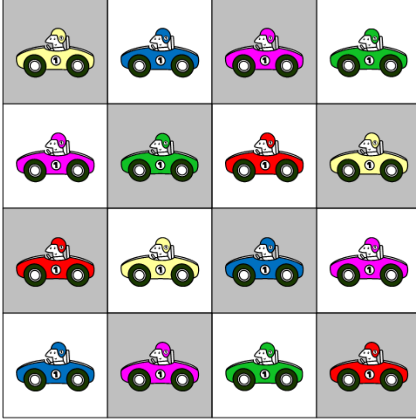
५) चावरे खेकडे – **(**आकृती १०.१५ पाहा)

६) बुद्धीचे बळ – **(**आकृती १०.१६ पाहा)

७) Well, Well किती लांब वेल ?

बिंदू १ व २ मध्ये असलेल्या निम्म्या आकाराच्या खांबाचा विचार करूया. निम्मी उंची १२५ सें.मी. आहे. खांबाचा परीघ ४० × π = १२५.६ सें.मी. आहे. १२५ सें.मी

उंचीचा व १२५.६ सें.मी. पाया असलेला काटकोन त्रिकोण घेऊन तो जर खांबाच्या वरच्या निम्म्या भागावर गुंडाळला तर त्याचा कर्ण म्हणजे वेलाचे एक वेटोळे असे समजता येईल. कर्णाची लांबी पायथागोरसच्या सिद्धान्तानुसार $१२५^{२} + १२५.६^{२}$ यांचे वर्गमूळ म्हणजे १७७.२ सें.मी. होईल. वेलीची दोन वेटोळी म्हणजे पूर्ण खांबाकरिता ही वेळ २ × १७७.२ = ३५४.४ होईल. दहा खांबांना त्यामुळे ३५४.४ × १० = ३५४४ सें.मी. = ३५.४४ मीटर तार लागेल.



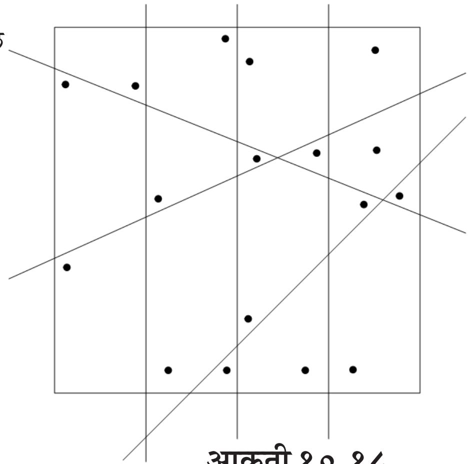
आकृती १०.१७

८) मोटारींची रंगसंगती – (आकृती १०.१७ पाहा)

९) Humpty Dumpty चे गणित –

हम्प्टी डम्प्टीचे जग म्हणजे आरशाच्या आतील जग ज्याच्यामध्ये डाव्या व उजव्या बाजूंची आलटापालट होते. ॲलिसने केलेली नवीन बेरीज आरसा उजव्या कडेवर धरून त्यात पाहिली तर बरोबर आहे असे दिसेल व ती हम्प्टी डम्प्टी मान्य करेल.

१०) मला चेरी पाहिजे –
(आकृती १०.१८ पाहा)



आकृती १०.१८

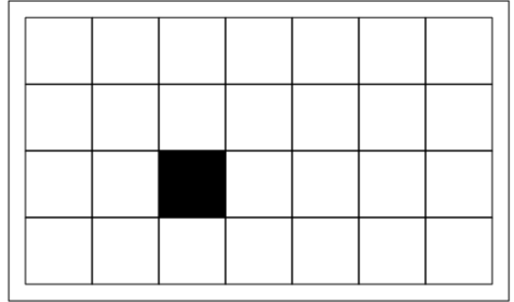
११) आंबे बासष्टी –
(आकृती १०.१९ पाहा)

१२) बाणेदार स्वयंसेवक –
आकृती ९.१४(३)
(प्रकरण ९ मधील पाहा)

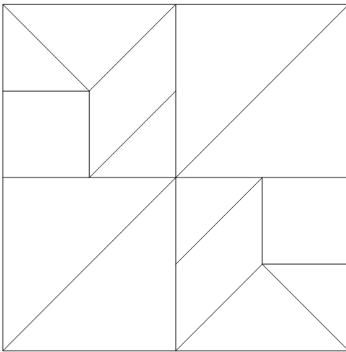
१३) एका खिडकीची गोष्ट –
(आकृती १०.२० पाहा)

४	९	१२	८	१०	४	७	९	१०	६	५	४
१३	१	२	३	१२	९	१०	११	१	२	३	११
५	८	६	५	१४	७	८	७	९	८	४	१
१	१२	७	४	३	१	११	५	१०	३	२	५
८	४	५	११	१२	१३	१२	३	११	१४	१२	१०
९	१५	११	७	८	२	३	१	१२	४	९	११
१०	१३	१२	३	४	५	१२	४	८	१२	३	१
७	५	४	८	१	९	१३	९	१०	७	६	५
१२	८	१	१५	८	११	६	७	८	१०	९	८
२	३	७	१०	३	७	५	११	१३	७	४	१०
१०	११	११	२	५	९	४	१०	१२	६	१४	७
१२	१	४	८	१०	१३	३	२	१	५	११	६

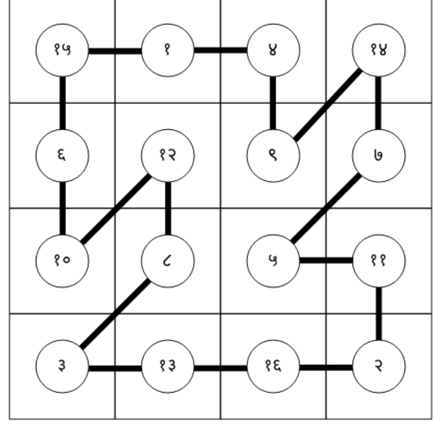
आकृती १०.१९



आकृती १०.२०



आकृती १०.२१



आकृती १०.२२

१४) रेशीमगाठी – दोऱ्यांची टोके ओढल्यास गाठी बसणार नाहीत.

१५) लहान चौरस, मोठा चौरस – (आकृती १०.२१ पाहा)

१६) पुतळ्यांची माळ इथे – (आकृती १०.२२ पाहा)

१७) मांजरओढ – दोन्ही दोऱ्या एकमेकीत अडकणार नाहीत.

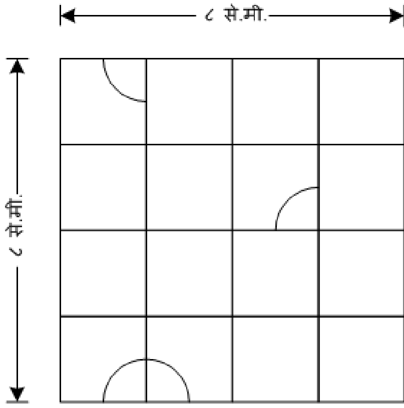
१८) रंगात रंगुनी

१ – नारिंगी सर्वात खालची
२ – गुलाबी
३ – निळा
४ – पिवळा
५ – हिरवा
६ – लाल सर्वात वरची

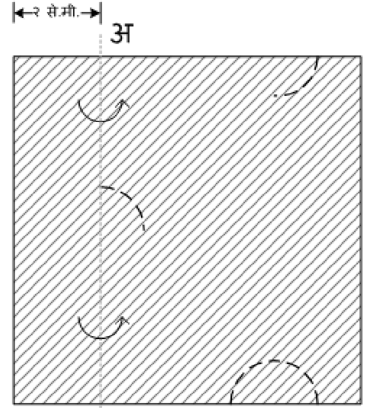
१९) शब्दच्छल

सागर	कपोल
मगर	कमल
मसूर	श्यामल
असूर	विमल
अमर	विशाल
अमला	मशाल
अबला	महान
अचला	मलीन

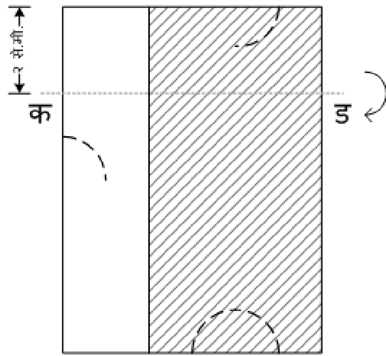
२०) वर्तुळघड्या – सुरुवातीला आकृती १०.२३ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे कागदाचा चौरस दिसतो. चौरसाच्या पाठची रंगीत बाजू वर येईल अशा रीतीने चौरस धरा. चौरसाच्या मागील वर्तुळाचे चतकोर मुद्दामच बिंदूमार्गाने दाखविले आहेत. आकृती १०.२४ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे 'अब' रेषेवर तुमच्या दिशेने एक घडी घाला. म्हणजे आकृती १०.२५



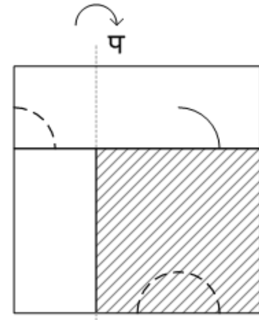
आकृती १०.२३



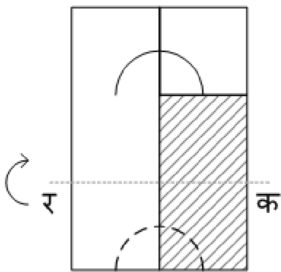
आकृती १०.२४



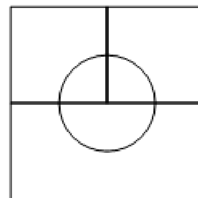
आकृती १०.२५



आकृती १०.२६



आकृती १०.२७


आकृती १०.२८

मध्ये दाखविल्याप्रमाणे कागद दिसेल. त्याची 'कड' रेषेवर तुमच्या दिशेने घडी घाला. कागद आता आकृती १०.२६ प्रमाणे दिसेल. त्याला 'पफ' रेषेवर तुमच्या दिशेने घडी घाला म्हणजे कागद आकृती १०.२७ प्रमाणे दिसेल. त्याला 'रक' रेषेवर तुमच्या दिशेने घडी घाला म्हणजे आकृती १०.२८ प्रमाणे कागद दिसून त्यावर पूर्णाकृती वर्तुळ दिसेल.

२१) जरा सरकून घ्या (१)

खालील अंक असलेले पुठ्ठ्याचे तुकडे क्रमाक्रमाने रिकाम्या जागेत सरकवल्यास १५ बेरीज असणारा जादूचा चौरस निर्माण होईल.

७, ३, ५, ४, ९, ७, ८, ६, ७, ५, ३, ८

एकंदरीत १२ खेळी लागतात.

२२) जरा सरकून घ्या (२)

एकंदरीत १४ खेळींमध्ये खालीलप्रमाणे पुठ्ठ्याचे तुकडे सरकवावे.

२, ५, १२, ६, ८, १३, ९, ४, १४, ७, ३, २, ६, १२

२३) पुस्तकातील किडा – (आकृती १०.२९)

पुस्तकांच्या पानांची जाडी ४ × ३ = १२ सें.मी.

पुस्तकाच्या ६ पुठ्ठ्यांची जाडी १/४ × ६ = १.५ सें.मी.

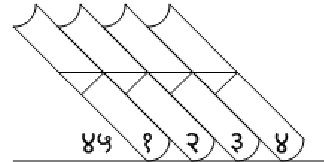
१२ + १.५ = १३.५ सें.मी.

पोखरलेले सरळ आडवे अंतर =

= १३.५$\sqrt{२}$

= १३.५ × १.४१४

= १९.०९ सें.मी.



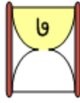
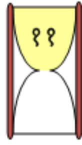
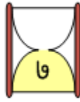
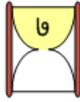
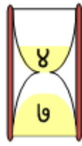
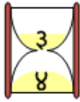
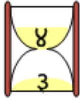
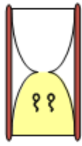
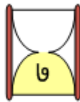
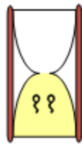
आकृती १०.२९

२४) कमीत कमी वेळात सोडवा

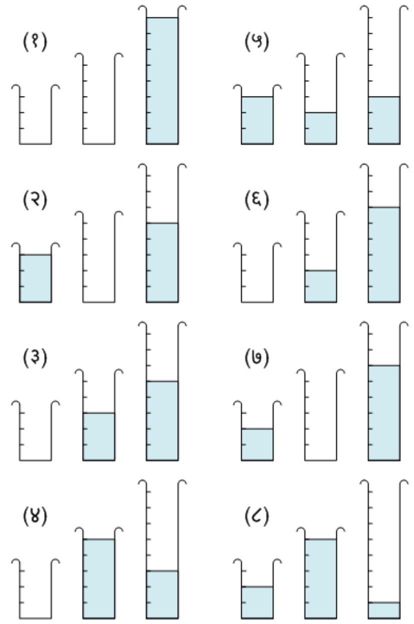
आकृती १०.३० मध्ये दाखविल्याप्रमाणे पहिल्या १५ मिनिटांमध्ये ७ मिनिटवाले घड्याळ उलटे फिरवा. ० वेळेपासून सुरुवात करून ७ मिनिटे, ११ मिनिटे व १५ मिनिटे झाल्यानंतर घड्याळांमध्ये किती मिनिटांची वाळू शिल्लक राहिली आहे ते दाखविले आहे. ३० मिनिटांचा वेळ मोजण्याकरिता आकृतीत पहिल्या १५ मिनिटांमध्ये दाखविलेली कृती परत एकदा करा.

२५) सकाळचा चहा

आकृती १०.३१ मध्ये ८ लिटर दुधाचे भांडे व ३ लिटर आणि ५ लिटर मापांमधील

वेळ (मिनीटे)		७ मिनीटांचे घड्याळ	११ मिनीटांचे घड्याळ
०			
७		 	
११		 	
१५			

आकृती १०.३०



आकृती १०.३१

दुधाची स्थिती पायरीपायरीने दाखविली आहे. शेवटी भय्याच्या दुधाच्या भांड्यात १ लिटर दूध राहते ते त्याने आम्हांला दिले व आमचा सकाळचा चहा वेळेवर झाला.

२६) डोंगर पोखरून उंदीर

या कोड्याचे उत्तर पायरीपायरीने खालीलप्रमाणे आहे.

६३०००क्ष + ३७००० य = १६३०००

३७०००क्ष + ६३००० य = १३७०००

या समीकरणांची अनुक्रमे बेरीज व वजाबाकी केल्यास खालील सोपी समीकरणे मिळू शकतात, हे ध्यानात यावयाची जरुरी आहे. मनातल्या मनात खालील आकडेमोड करणे थोड्या प्रयासाने शक्य आहे.

१००००० क्ष + १००००० य = ३०००००

२६००० क्ष − २६००० य = २६०००

म्हणजेच,

क्ष + य = ३

आणि क्ष − य = १

यांची बेरीज केल्यास

२ क्ष = ४, क्ष = २

क्ष + य = ३, २ + य = ३, य = १

२७) अंकांचा खो खो

कोणतीही चार अंकी संख्या खालीलप्रमाणे लिहिता येते.

१००० अ + १०० ब + १० क + ड

दोनदा खो देऊन आलेली संख्या खालीलप्रमाणे लिहिता येते.

१००० क + १०० ड + १० अ + ब

वरील दोन्ही संख्यांची बेरीज खालीलप्रमाणे येते

१०१० अ + १०१ ब + १०१० क + १०१ ड

या संख्येला १०१ ने नि:शेष भाग जातो.

कल्पना, शालिनी आणि राधिका यांनी फळ्यावर लिहिलेल्या संख्यांना १०१ ने नि:शेष भाग जातो. मोहिनीने लिहिलेल्या ६२६३ या संख्येला १०१ ने नि:शेष भाग जात नाही, म्हणून तिच्या आकडेमोडीत कुठेतरी चूक झाली आहे.

२८) या सम हा

खेळावयाची पहिली पाळी तुम्ही घेतली तर खालीलप्रमाणे विशिष्ट मार्गपद्धतीने जाऊन हा खेळ हमखास जिंकता येईल.

१) सुरुवातीला तुम्ही २ काड्या घ्या.

२) जर तुमच्या प्रतिस्पर्ध्याने आतापर्यंत घेतलेल्या काड्यांची संख्या सम असेल तर तुम्ही इतक्या काड्या घ्या की, उरलेल्या काड्यांची संख्या १९, १३, ७ किंवा १ असेल.

३) जर तुमच्या प्रतिस्पर्ध्याने आतापर्यंत घेतलेल्या काड्यांची संख्या विषम असेल तर तुम्ही इतक्या काड्या घ्या की, उरलेल्या कांड्यांची संख्या २३, १७, ११ किंवा ५ असेल.

४) वरीलपैकी दोन्ही शक्य नसेल तर तुम्ही इतक्या काड्या घ्या की, उरलेल्या काड्यांची संख्या २४, १८, १२ किंवा ६ असेल.

२९) पोळ्यांमध्ये सुद्धा गणित ?

तक्ता १०.१ मध्ये दर्शविल्याप्रमाणे एका वेळी दोन पोळ्या भाजाव्या.

प्रत्येक पोळी प्रत्येक बाजूवर दोनदा भाजली गेली आहे.

एकंदर १२० सेकंदात ३ पोळ्या भाजून झाल्या आहेत. म्हणजे वेळेची आणखी बचत १६०–१२० = ४० सेकंदांची झाली आहे.

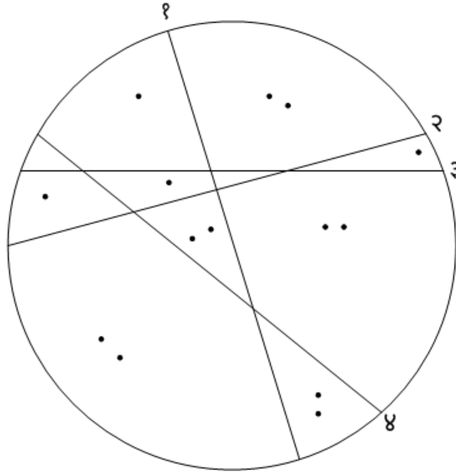
पोळी १	पोळी २	पोळी ३	वेळ (सेकंद)
बाजू १	बाजू १	–	२०
बाजू २	बाजू २	–	२०
बाजू १	–	बाजू १	२०
बाजू २	–	बाजू २	२०
–	बाजू १	बाजू १	२०
–	बाजू २	बाजू २	२०
			१२०

तक्ता १०.१

३०) एक केक अकरा जणांत

आकृती १०.३२ पाहा.

जर सरळ रेषांची संख्या 'न' असेल तर केकचे जास्तीत जास्त तुकडे $^{१}/_{२}$ (न^{२}+न+२) इतके करता येतात. मात्र प्रत्येक रेषेने इतर सर्व रेषांना छेद दिला पाहिजे व कोणत्याही छेदन बिंदूमधून २ पेक्षा जास्त रेषा जाता कामा नाहीत.



आकृती १०.३२

संदर्भसूची

१) बहुरंगी करमणूक भाग १ ते ३ - रा. त्र्यं. रानडे

२) गणितातल्या गमती जमती - डॉ. जयंत नारळीकर

३) गणितातल्या पाऊलखुणा - प्रा. मोहन आपटे

४) जादूचा चौरस - दि. य. कानविंदे

5) The Hinged Square and other Puzzles - Ivan Moscovich

6) The Shoelace Problem and other Puzzles - Ivan Moscovich

7) Leonardo's Mirror and other Puzzles - Ivan Moscovich

8) Mathematical Recreations and Essays - W. W. Rouse Ball and H.S.M. Coxeter

9) Mathematical Recreations - M. Kraitchik

10) 101 Puzzles in Thought and Logic - C. R. Wylie Jr.

11) Logic Machines and Diagrams - Martin Gardner

12) Mathematics, Magic and Mystery - Martin Gardner

13) 536 Puzzles and Curious Problems - H. E. Dudeney

14) Mathematical Diversions (Part I, II, VI) - Martin Gardner

15) Amusements in Mathematics - H. E. Dudeney

16) Magic Squares and Cubes - W. S. Andrews

17) The Zen of Magic Squares, Circles and Stars - Clifford A. Pickover

18) The Canterbury Puzzles - H. E. Dudeney

19) Compedium of Puzzles - Sam Loyd

20) The Monty Hall Problem and other Puzzles - Ivan Moscovich

21) 1000 Play Thinks - Ivan Moscovich

22) wikipedia.org

23) Scientific American (मागील अंक)

लेखकांविषयी थोडेसे...

शशिकांत दत्तात्रय चवाथे

B. E. (Civil)
M. E. (Environmental Engg.),
FIWWA, MIE



पर्यावरण अभियांत्रिकी सल्लागार उद्योगांमधील ४० वर्षांपेक्षा जास्त अनुभव. शहरांच्या पाणीपुरवठा, मलनि:सारण, पावसाच्या पाण्याचे नि:सारण वगैरे योजना तयार करण्यात विशेष प्राविण्य. राज्य स्तरावरील आणि महानगरपालिका स्तरावरील WORLD BANK, Netherland Government आणि Japan International Co-operation Agency यांनी आर्थिक मदत केलेल्या काही योजनांमध्ये वरील संस्थांच्या तर्फे पाठविलेल्या प्रातिनिधिक मंडळामध्ये सभासद. सध्या पर्यावरण अभियांत्रिकीतील स्वतंत्र सल्लागार. मुंबईतील सुप्रसिद्ध अभियांत्रिकी संस्थेमध्ये **Adjunct Professor.**

Website : Puzzleland.in
E-mail : sdchawathe@gmail.com
inpuzzleland@gmail.com

निलेश प्रताप गोरे

B.Com., F.C.A. चार्टर्ड अकाऊंटंट



स्वतंत्र व्यवस्थापन सल्लागार म्हणून कार्यरत. २० वर्षांपेक्षा जास्त अनुभव. कोणत्याही नवीन उद्योगांचा साचा कसा असावा याबद्दल खास प्राविण्य. तोट्यात अथवा कमी नफ्यात चालणाऱ्या उद्योगांना नफ्यात आणण्याबाबत खास हातोटी. उद्योग वृद्धीसाठी मनुष्यबळ विकास व काऊन्सेलिंग. शेकडो विद्यार्थ्यांचा व्यक्तिमत्त्व विकास आणि व्यसनपराङ्मुख होण्याकरिता मार्गदर्शन. विविध क्षेत्रांमधील परिषदांमध्ये निर्णयक्षमता, उत्पादकता वर्धन, ताणतणाव मुक्तता, वेळेचे सुनियोजन इत्यादी विषयांवर मार्गदर्शन.

E-mail : nileshpgore@gmail.com